ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್

ಎಸ್. ಪ್ರವೀಣ

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ

ಎಲ್ಲರ ಮನೆಗಳ ಗೋಡೆಗಳಲ್ಲಿ ತೂಗಾಡುವ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹಾಳೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟೊಂದು ಗಣಿತ ಸಂರಚನೆಗಳೂ ವಿನ್ಯಾಸಗಳೂ ತುಂಬಿವೆಯೆಂಬುದು ಆಶ್ಚರ್ಯ ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್‌ರವರ ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ವಿಷಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಮಾಡಿ ಅತಿ ಸಹಜ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಗಣಿತ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ರವಾನಿಸುತ್ತದೆ. ಪದವಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವ ಗ್ರೂಪ್ಸ್, ರಿಂಗ್ಸ್ ಮತ್ತು ಫೀಲ್ಡ್ಸ್‌ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಹಾಳೆಯ ಮೂವತ್ತು ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟೊಂದು ಗಣಿತ! ಓದಿದವರಿಗಷ್ಟೇ ದಕ್ಕುವ ಸಂತೋಷ, ಆಮೋದಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆ.

* * *

ಕೃತಿಯ ಲೇಖಕ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್‌ರವರು ಚೆನ್ನೈಯಲ್ಲಿನ ಮುತ್ಯಾಲಪೇಟೆಯ ಹೈಸ್ಕೂಲೊಂದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯರಾಗಿದ್ದರು. ತಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಸಾಹ ತುಂಬಿ ರಾಮಾನುಜನ್‌ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ, ದೇಶದಲ್ಲೇ ಏಕೈಕ ಎಂಬಂತಹ ಕಾಗದ ಪತ್ರ – ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಗ್ರಹಾಲಯವೊಂದನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಕಾಯಕವನ್ನಾಗಿಸಿ ಅದರ ಸಂವಹನಕ್ಕೆ ಶ್ರಮಿಸಿದ್ದಾರೆ. 'ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂವಹನ ಪುರಸ್ಕಾರ' ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಫುಲ್‌ಬ್ರೈಟ್ ಸ್ಕಾಲರ್ ಆಗಿ ನೈಜೀರಿಯದಲ್ಲೂ ದುಡಿದಿದ್ದಾರೆ.

* * *

ಕೃತಿಯ ಅನುವಾದಕ ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಪ್ರವೀಣ ಜನಪ್ರಿಯ ಗಣಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರು. ಕೋಲಾರದ ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತ, ಮನರಂಜನೆ ಮತ್ತು ಸಂವಹನ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕ ಅನುಭವವುಳ್ಳ ಇವರು ಪತ್ರಿಕೆಗಳಿಗೂ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ISBN 81-8467-348-5
9788184673487

₹ 40 Code : 002097

URL : www.navakarnataka.com
http://navakarnataka.blogspot.in
facebook.com/navakarnataka
twitter.com/navakarnataka

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್

ಗಣಿತ ಸಂವತ್ಸರ
೨೦೧೨

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ

ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್

ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ : ಎಸ್. ಪ್ರವೀಣ

8 + 17 + 2 = 27 16 + 1 + 10 = 27 7 + 4 + 16 = 27 2 + 15 + 10 = 27

Recd 13/July/2013

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನದ ೩೬೮೬ನೇ ಪ್ರಕಟಣೆ

ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ

ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ
ಎಸ್. ಪ್ರವೀಣ

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ

CALENDARNONDIGE SANKHYAVINODA (Kannada)
NUMBER FUN WITH A CALENDAR by P. K. Srinivasan
Translated by S. Praveena, in the series
'Ganita Samvatsara 2012' (National Year of Mathematics - 2012)

First Edition : 2013 **Pages : 68** **Price : ₹ 40**

Paper used for this book : 70 gsm Maplitho 18.6 Kgs (1/8 Demy Size)

ಮೊದಲ ಮುದ್ರಣ : 2013

ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : 1000

ಬೆಲೆ : ₹ 40

ಮುಖಪುಟ : ಎಂ. ಎಸ್. ಶ್ರೀಕಂಠಮೂರ್ತಿ

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪಬ್ಲಿಕೇಷನ್ಸ್ ಪ್ರೈವೆಟ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್
ಎಂಬೆಸಿ ಸೆಂಟರ್, ಕ್ರೆಸೆಂಟ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - 560 001
ದೂರವಾಣಿ: 080-30578020/22 ಫ್ಯಾಕ್ಸ್: 080-30578023
email : navakarnataka@gmail.com

ಶಾಖೆಗಳು/ಮಳಿಗೆಗಳು
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಕ್ರೆಸೆಂಟ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - 1, ✆ 080-30578028/35, email : nkpsales@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಗಾಂಧಿನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು - 9, ✆ 080-22251382, email : nkpgnr@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಕೆ.ಎಸ್. ರಾವ್ ರಸ್ತೆ, ಮಂಗಳೂರು - 1, ✆ 0824-2441016, email : nkpmng@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಬಲ್ಮಠ, ಮಂಗಳೂರು - 1, ✆ 0824-2425161, email : nkpbalmatta@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ರಾಮಸ್ವಾಮಿ ವೃತ್ತ, ಮೈಸೂರು - 24, ✆ 0821-2424094, email : nkpmys@yahoo.co.in
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಸ್ಟೇಷನ್ ರಸ್ತೆ, ಗುಲಬರ್ಗಾ - 2, ✆ 08472-224302, email : nkpglb@gmail.com

0105133686 **ISBN 978-81-8467-348-7**

Printed by R. S. Rajaram at Navakarnataka Printers, No. 167 & 168, 10th Main III Phase, Peenya Industrial Area, Bangalore - 560 058 and published by him for Navakarnataka Publications (P) Ltd., Embassy Centre, 11, Crescent Road P. B. 5159, Bangalore-560 001 (INDIA). Typeset at Navakarnataka, Bangalore-1

ಸಂಪಾದಕರ ನುಡಿ

ವಿಶ್ವವಿಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಪ್ರತಿಭೆ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರ 125ನೇ ಜನ್ಮವರ್ಷವಾದ 2012ನೇ ಇಸವಿಯನ್ನು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರವು 'ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತ ವರ್ಷ' ಎಂದು ಘೋಷಿಸಿರುವುದು ಸ್ತುತ್ಯರ್ಹ.

ಈ ಪರ್ವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಾದ್ಯಂತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ, ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗಾಗಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಾಭಿಮಾನಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕರಿಗಾಗಿ ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ ಮತ್ತು ಸ್ವಾರಸ್ಯಮಯ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೊರತರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ ಸಂಸ್ಥೆಯು ಯೋಜನೆಯೊಂದನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಂತೆ ಈ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಗೆ ತಿಳಿಸಿತು. ಅದರಂತೆ ಮಂಡಲಿಯು ತಜ್ಞ ಲೇಖಕರನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಂತೆಯೂ ಇನ್ನು ಕೆಲವನ್ನು ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯಿಂದ ಅನುವಾದಿಸುವಂತೆಯೂ ಏರ್ಪಾಡು ಮಾಡಿತು. ಈ ಪ್ರಯತ್ನದ ಫಲವಾಗಿ **ವಿಶ್ವದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಮಹಿಳಾ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ಮಾಯಾಚೌಕಗಳ ಸ್ವಾರಸ್ಯ, ಭಾರತೀಯ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತ, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ, ಸಂಖ್ಯಾಲೋಕದಲ್ಲಿ ಅಲೆದಾಟ,** ಏನು ? **ಗಣಿತ ಅಂದ್ರಾ ?, ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ, ಪ್ಲೇಟೋನ ಘನಾಕಾರಗಳು, ಒರಿಗಾಮಿ** ಮುಂತಾದ ಹೊತ್ತಿಗೆಗಳು ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿವೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖಕರಾಗಿದ್ದ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾಯರ **ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ : ಜೀವನ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ** ಎಂಬ ಕೃತಿಯನ್ನು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ನಾಡಿನ ಓದುಗರಲ್ಲಿ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದ ಆಸಕ್ತಿ, ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಸ್ಫೂರ್ತಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಈ ಕೈಂಕರ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಭಾಗವಹಿಸಿರುವ ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪಬ್ಲಿಕೇಷನ್ಸ್ ಪ್ರೈವೆಟ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್ ಸಂಸ್ಥೆಯವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಅಭಿನಂದನೆಗಳು.

ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿ

ಪ್ರಕಾಶಕರ ನುಡಿ

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಇಂದು ವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿದೆಯಾದರೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಕುರಿತ ಕೃತಿಗಳು ತೀರಾ ವಿರಳವೆಂದೇ ಹೇಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 2012ನೇ ಇಸವಿಯನ್ನು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರ 'ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತ ವರ್ಷ' ಎಂದು ಘೋಷಿಸಿರುವುದು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಕೊರತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಮ್ಮನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಸಿ ಕಾರ್ಯೋನ್ಮುಖರಾಗುವಂತೆ ಪ್ರೇರೇಪಿಸಿದೆ.

ಈ ಕುರಿತು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನ ಕೃತಿಗಳ ಲೇಖಕರಾಗಿ ಖ್ಯಾತರಾಗಿರುವ ಡಾ॥ ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್ ಅವರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿ, ನಾಲ್ಕು ಸದಸ್ಯರ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಪ್ರಕಟಣೆಗಳ ರೂಪುರೇಷೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಂಡು 'ಗಣಿತ ಸಂವತ್ಸರ – ೨೦೧೨' ಮಾಲೆಯಡಿ ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೊರತರುವುದಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಯಿತು.

ಮಾಲೆಯ ಮೊದಲ ಪುಸ್ತಕವು ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಜೀವನ – ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಶ್ವದ ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞೆಯರ ಕುರಿತಾದ ಪುಸ್ತಕವು ಈ ಮಾಲೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಇನ್ನುಳಿದವು ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ಆಯಾಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತ ಜ್ಞಾನದ ಜೊತೆಗೆ ಮನೋಲ್ಲಾಸ ನೀಡುವಂಥವು. ರಷ್ಯದ ಗಣಿತದ ಮೋಡಿಗಾರರೆಂದು ವಿಖ್ಯಾತರಾದ ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ಹಾಗೂ ಚೆನ್ನೈಯಲ್ಲಿನ ಗಣಿತ ಸಂವಹನಕಾರರಾದ ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್ ಅವರ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಅನುವಾದಗಳೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಸೇರಿವೆ.

ಯಾವತ್ತೂ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುವಲ್ಲಿ ಮುಂಚೂಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ನಮ್ಮ ಪ್ರಕಾಶನದ ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಓದುಗರು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವರೆಂಬ ನಂಬಿಕೆ ನಮಗಿದೆ. ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಓದಿ, ಒಪ್ಪ ಓರಣಗೊಳಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಯ ಸದಸ್ಯರಿಗೂ, ಕೃತಿ ರಚನೆ ಮಾಡಿದ ಲೇಖಕರಿಗೂ ಹಾಗೂ ಮೂಲ ಕೃತಿಗಳಿಂದ ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ತಂದ ಅನುವಾದಕರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು ಸಲುತ್ತವೆ. ಮುಖಪುಟ ಹಾಗೂ ಒಳಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ ಕಲಾವಿದರಿಗೂ, ಸಹಕರಿಸಿದ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ವಂದನೆಗಳು.

ಆರ್. ಎಸ್. ರಾಜಾರಾಮ್

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ

ಲೇಖಕರ ಮಾತು

ವರ್ಷಾದಿಯಲ್ಲಿ ಯುವಕರು ಮತ್ತು ವಯಸ್ಕರು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಹುಡುಕಾಟದ ಆನಂದದ ಪ್ರಮೋದದಲ್ಲಿ ತೊಡಗುತ್ತಾರೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವರು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುವುದರೊಂದಿಗೆ ತಮ್ಮ ಆಪ್ತೇಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಅಸೂಯೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರನ್ನು ಮನೆ, ಶಾಲೆ, ಅಂಗಡಿ, ಕಛೇರಿಗಳಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಗೆ ನೇತುಹಾಕಲಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ 7 ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯದವರು ವಿರಳ. ಆದರೆ ಈ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕುತೂಹಲಕಾರೀ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅರಿತವರು ಬಹಳ ಅಪರೂಪ.

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅದ್ಭುತವಾದ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವಿಶದಪಡಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ, ಗಣಿತದ ಮೋಜಿಗೆ ನೂತನ ಆಕರವನ್ನು ದೊರಕಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಂತಹ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಗೆ ಒಡ್ಡಿಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು, ಅವರು ಗಣಿತದ ಸ್ವಾದವನ್ನು ಪಕ್ವಗೊಳಿಸುವುದು ನಿಶ್ಚಿತ. ಇದರಿಂದ ಅವರ ಕುತೂಹಲ ಕೆರಳುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತಾವಾಗಿಯೇ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಇದು ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾದ ಮಹತ್ವದ ಸೋಪಾನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಿಂಡರ್‌ಗಾರ್ಟನ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೇ ಗಣಿತ ಕಲಿಸುವುದು ಬಹಳ ತಡವಾಯಿತೆಂದು ಬಯಸುವ ಜನರಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೂ ಮೂಲಭೂತ ಕೌಶಲ್ಯಗಳಾದ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತನಂತರ ಅವರು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿನೋದಕ್ಕೆ ತಯಾರಾಗಿರುವರೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ವಿವಿಧ ವಯೋಮಾನದ ಪಂಗಡಗಳಿಗೆ ಆತ್ಮೀಯವಾಗಬಲ್ಲ ಈ ವಿಷಯವು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯು ಅಂತಹ ವಿಶೇಷ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರಿದೆ. ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಅದು ಒಡ್ಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಭಾಷಣೆಯ ರೀತಿಯು ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಗಾಢ ಆಲೋಚನೆಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯಬಲ್ಲದು. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಚಲನಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ವೀಡಿಯೋ ಟೇಪ್ ಮಾಡಬಹುದಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಮೋಜಿನ ಮೂಲಕ ಆನಂದಿಸಿ, ಗಣಿತದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲವೇ ? ಗಣಿತದ ಕಡೆ ಒಲವು ಇರುವ ಯಾರಾದರೂ ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ.

– ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್

ಪರಿವಿಡಿ

1. ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಬನ್ನಿ	...	9
2. ದಿಢೀರ್ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ದಿಢೀರ್ ಮೊತ್ತ	...	11
3. ಮಾಯಾ ಆಯತಗಳು	...	16
4. ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕಗಳು	...	18
5. ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು	...	22
6. ನಕ್ಷತ್ರಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು	...	25
7. ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕಗಳು	...	28
8. ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತದಾಟ	...	42
9. ದಿನ ಮತ್ತು ದಿನಾಂಕ	...	47
10. ಗಣಿತ ಸಂರಚನೆಗಳು	...	54

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಆಲೋಚನೆ ಅಥವಾ ಸಮಸ್ಯೆ ಅಥವಾ ಜ್ಞಾನವನ್ನು, ಕಲಿಯಲು ಬಯಸುವವನಿಗೆ, ಅದನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾಗಿ ಒಂದು ಪರಿಚಿತವಾದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

ಜೇಮ್ಸ್ ಎಸ್. ಬ್ರೂನರ್

1. ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಬನ್ನಿ

ನಾನು ಪ್ರಸಾದ್, 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತಿರುವೆ. ನನ್ನ ತಮ್ಮ ರವಿ, 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತಂಗಿ ಸುಶೀಲ, 5ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ನಮ್ಮ ತಂದೆ ಜವಳಿ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಮತ್ತು ಅವರು ವಾರಾಂತ್ಯವನ್ನು ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಪ್ರೀತಿಯಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತವನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಕಾಗದದ ಚೂರು, ಬೆಲ್ಟ್, ಹಾಳೆ, ರೈಲು ಟಿಕೇಟ್, ಟಂಬ್ಲರುಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳಿಂದ ಗಣಿತದ ಆಟವನ್ನು ಆಡಲು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಆಟಗಳೂ ನಮ್ಮ ಗಣಿತದ ಹಸಿವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿವೆ.

ನಾನು ಏನನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋದರೂ ಅವರು ಅದನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿ, ಅದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ಯೋಜಿಸುವುದು ನಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವೇ ಸರಿ! ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿನ ಗಣಿತವಿಲ್ಲದೆ ಯಾವುದೇ ಆಟವಿರಲಾರದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದು ಇವರಿಂದಲೇ, ಅದಕ್ಕೇ ನಾವು ಆಭಾರಿಗಳೂ ಕೂಡಾ.

1988ರ ಮೇ 1ನೇ ದಿನ ಭಾನುವಾರ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ರಜೆಗಳು ಈ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಈ ಮೇ ತಿಂಗಳಿನ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯ ವಿನೋದವಿರಬಹುದೆಂದು ನಾವು ಅವರನ್ನು ಕೇಳಿದೆವು. ಅಷ್ಟೇ. ಮೇ ತಿಂಗಳ ಪ್ರತಿ ವಾರಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅದ್ಭುತ ಸಮಯವನ್ನು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಕಳೆದೆವು.

ಒಂದೋ ಅಥವಾ ಎರಡು ಸುಳಿವುಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹಾಳೆಯ ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ಕಥೆಯನ್ನು ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಮುಂದೆ ಇಟ್ಟು, ಇದರ ವಿನೋದವನ್ನು ಆನಂದಿಸಲು ಮತ್ತು ಇತರರೊಂದಿಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿಮ್ಮನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲು ನಮಗೆ ಅವರು ಸ್ಲೇಟುಗಳನ್ನು ತರಲು ಹೇಳಿದರು. ಸುಶೀಲಳ ಸ್ಲೇಟ್ ಮೇಲೆ ಅವರು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆದು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ತಿಂಗಳ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಜೋಡಣೆ ಇದೆಯೇ ಎಂದು ಕೇಳಿದರು. ಮೊದಲಿಗೆ ನಾವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲು ತಯಾರಾದೆವು. ಆದರೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸದ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಮೂಲಕವೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದು ಅವರು ಹೇಳಿದರು.

					1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31				

ಮೊದಲು ಸುಶೀಲ ಗೊತ್ತಾಗಲಿಲ್ಲವೆಂದಳು. ವಾರದ ಏಳು ದಿನಗಳೊಂದಿಗೆ ಸರಿ ಹೊಂದಲು ಕೇವಲ ಏಳು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ತಂದೆಯು ಬರೆದ ಜೋಡಣೆ, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲವೆಂದು ರವಿ ಹೇಳಿದನು. ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಏಳರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅಪ್ಪ ಬರೆದ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಂಟರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದೆ ನಾನು. ಸುಶೀಲ ಎಚ್ಚೆತ್ತು, ವಾರದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಏಳು ದಿನಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಏಳು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿರುವುದೇ ಹೊರತು ಎಂಟು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲ ಎಂದಳು. ಸುಶೀಲಳು "ಎಚ್ಚೆತ್ತಳೆಂದು" ನಾನು ಹೇಳಿದೆ. ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲಿನ ಹುಡುಕಾಟದ ಕಥೆಯು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು.

2. ದಿಢೀರ್ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ದಿಢೀರ್ ಮೊತ್ತ

ಅಪ್ಪ : ಮೇ 1988ರ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹೀಗಿದೆ.

ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

ರವಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ತೋರಿಸು, ನಾನು ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಅಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತೇನೆ.

ರವಿ : ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು.

ಅಪ್ಪ : 11.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನಗೆ ಗೊತ್ತು ಅದು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಅಪ್ಪ : ಹುಷಾರಾಗಿರಿ. ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಈಗ ನಾವು ಈ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಶ್ರೇಢಿಯಿದೆಯೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಢಿಯಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 1 ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿದೆ :

ಉದಾ : 1 + 1 = 2, 2 +1 = 3 ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅಪ್ಪ : ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ?

ರವಿ : ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 7 ಹೆಚ್ಚಳವಿದೆ. ಉದಾ : 1+7=8, 8+7=15ಇತ್ಯಾದಿ

ಅಪ್ಪ : ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಶ್ರೇಢಿಗಳಿವೆ. ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಬಲ ಕೆಳಭಾಗದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳವು 8.

ಉದಾ : 1 + 8 = 9, 9 + 8 = 17 ಬಲ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಕೆಳ ಎಡಭಾಗದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳವು 6.

ಉದಾ : 4 + 6 = 10, 10 + 6 = 16

ಅಪ್ಪ : ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ (ಪದ)ವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಒಂದು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರೆಯುವ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸಂಕಲಿತ(ಸಂಕಲನ, ಸಮಾಂತರ) ಶ್ರೇಢಿ, Additive or Arithmetic sequence ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ರವಿ : ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ 15. ನಾನು ಹೇಳಿದ್ದು ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ: ಹೌದು ಸರಿ. ಹಾಗೆಯೇ 17 ಎರಡು ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ ನೀವು ಗುರುತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

ರವಿ : 3, 10, 17, 24, 31 ಮತ್ತು 5, 11, 17, 23, 29.

ಸುಶೀಲ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. ಏಕಲ್ಲ ?

ರವಿ : ಇಲ್ಲಿ 17 ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಅಪ್ಪ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ, ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಕೂಡಿ, ಒಟ್ಟು ಪದಗಳ (terms) ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಸರಾಸರಿಯು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ನೀವು ಹೇಳುವುದೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡು.

ರವಿ : $$\frac{(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)}{7} = \frac{28}{7} = 4,$$

$$\frac{(1 + 8 + 15 + 22 + 29)}{5} = \frac{75}{5} = 15$$ ಹೌದು

ಅದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ : ನೀವು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ, ನಾನು ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇನೆ.

ಸುಶೀಲ : ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು.

ಪ್ರಸಾದ : 77, ಸರಿಯೇ ?

ರವಿ : 7 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 11 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $11 \times 7 = 77$ ಹಾಗಾದರೆ 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ ?

ಅಪ್ಪ : ಅಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ದಿಢೀರ್ ಮೊತ್ತ ಕೊಡಬಲ್ಲೆ. ಅದು 58.

ಸುಶೀಲ : 4+11+18+25=58. ಹೌದು ಸರಿ. ಹೇಗೆ ಬಂತು ?

ರವಿ : ಅದು ಹೇಗೆ ಬಂತಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ: ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4. ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕಡೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡು, $4 + 25 = 29$. ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಿಂದ $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗುಣಿಸು.

ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $29 \times 2 = 58$ ಆಗುವುದು.

ಸುಶೀಲ : ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ, ಮಧ್ಯ ಪದವು ಸರಾಸರಿಯಾಗುವುದು. ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಿಗುವುದು. ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ...

ರವಿ : ಮಧ್ಯ ಪದವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅಂತ್ಯಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಿಗುವುದು.

ಅಪ್ಪ: ಅವು ಅಂತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಬೇಕೆಂದೇನಿಲ್ಲ. ಅಂತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೂಡಿ ನೋಡು.

ರವಿ : 4, 11, 18, 25ರಲ್ಲಿ 4ರ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ 11, 25ರ ಮುಂಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 18. 11ಮತ್ತು 18ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 29 ಸಿಗುವುದು. ಅದೇ ರೀತಿ $4 + 25 = 29$.

ಅಪ್ಪ: ತುಂಬಾ ಚೆನ್ನಾಗಿದೆ. ಅಂತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾಗಿ ನಾನು ಸಮಸ್ಥಾನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಸ್ಥಾನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಜೋಡಿಯಾಗುತ್ತವೆ (4, 25) (11, 18) ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿಯೂ ಒಂದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಬಗೆಯ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2 = \frac{1}{2} \times 4$ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೋಡಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಅಪ್ಪ: ತುಂಬಾ ಸುಂದರವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೀಯ. ನಾನು ನಿಮಗೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞ ಗೌಸ್(Gauss)ನ ಬಗ್ಗೆ ಕಥೆ ಹೇಳಿದ್ದೇನೆಯೇ ?

ಸುಶೀಲ : ಇಲ್ಲ. ಕಥೆ ಹೇಳಿ ಅಪ್ಪ.

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ ಕೇಳಿ. ಗೌಸ್ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ 3ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ. ಮಕ್ಕಳ ಗಮನ ಅತ್ತಿತ್ತ ಹರಿಯದಂತೆ ಮಾಡಲು ಒಮ್ಮೆ ಅವರ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರು. ಅದು 1ರಿಂದ 100ರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಯಾವ ಹುಡುಗ ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೋ ಅವನು ಶಿಕ್ಷಕನ ಟೇಬಲ್ ಮೇಲೆ ಸ್ಲೇಟ್ ಇಡಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಈಗಾಗಲೇ ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಾಕಷ್ಟು ಪರಿಶ್ರಮವಿದ್ದ ಗೌಸ್, ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ತತ್‌ಕ್ಷಣ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಉತ್ತೇಜಿತನಾದ. ತನ್ನ ಸ್ಲೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ 1ರಿಂದ 100ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 5050 ಎಂದು ಬರೆದು ಟೇಬಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಸ್ಲೇಟ್ ಇಡುವುದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿಗನಾದ.

ರವಿ : ಅವನು 1ರಿಂದ 100ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೂಡಿದನೆ ?

ಅಪ್ಪ : ಇಲ್ಲ.

ಸುಶೀಲ : ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಇವನ ಮೇಲೆ ಕೋಪ ಬಂದಿರಬೇಕು ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು. ಅವರಿಗೆ ಕೋಪ ಬಂದಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವರ ಕೋಪವನ್ನು ಅವರ ಆಶ್ಚರ್ಯ ನುಂಗಿತ್ತು. ಉತ್ತರ ಹೇಗೆ ಗೊತ್ತೆಂದು ಗೌಸ್‌ನನ್ನು ಕೇಳಿದರು.

ರವಿ : ಅವನು ಸಮಸ್ಥಾನಿಕ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಬಹುದು. (1+100). (2+99),... ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿಯ ಮೊತ್ತ 101. ಅಲ್ಲಿ $\frac{1}{2} \times 100 = 50$ ಜೋಡಿಗಳು ಇವೆ.

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+98+99+100$$

ಆದ್ದರಿಂದ $101 \times 50 = 5050$

ಪ್ರಸಾದ್ : ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಅವನೊಬ್ಬನೇ ಮಾಡಿದನೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು ಅವನ ಗಣಿತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಿದ.

ಸುಶೀಲ : ಅಬ್ಬಾ ಅವನು ಅತಿದೊಡ್ಡ ಗಣಿತಜ್ಞನಾಗಿದ್ದು ಆಶ್ಚರ್ಯವೇನಲ್ಲ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳೇಕಿರಬೇಕು ? ಒಂದೇ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ಹೊಂದಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಲು ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. (ಈ ಸಂದರ್ಭ ಅದನ್ನೇ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಬರಿ)

ರವಿ : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

ಅಪ್ಪ : ಸಮಸ್ಥಾನಿಕ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಾಡು.

ರವಿ : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

ಅಪ್ಪ : ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿಯ ಮೊತ್ತವೇನು ?

ಸುಶೀಲ : 22. ಉದಾ: 8+14=22, 9+13=22,...

ಅಪ್ಪ : ಎಷ್ಟು ಜೋಡಿಗಳಿವೆ ?

ರವಿ : 7

ಅಪ್ಪ : ಏಳು ಜೋಡಿಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು ?

ಸುಶೀಲ : 7×22 = 154. ಆದರೆ ನಮಗೆ 77 ಸಿಗಬೇಕು

ಪ್ರಸಾದ್ : ಸರಿ, ನಾವು ಮೊತ್ತದ ಎರಡರಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಶ್ರೇಢಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವು. ಆಗ ನಾವು ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧದಷ್ಟನ್ನು ಪಡೆದೆವು.

ಸುಶೀಲ : ಹೌದಾ ! 154ರ ಅರ್ಧ 77, ಇದು ಸರಿ.

ಅಪ್ಪ : ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ 8 ಮತ್ತು ಕಡೆಯ ಪದ 14 ಒಟ್ಟು ಏಳು ಪದಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡರಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಮೊತ್ತವು 7×(8+14), ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಒಂದರಷ್ಟರ ಮೊತ್ತ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊತ್ತವು $\frac{1}{2}\times 7\ (8+14)$. ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು 'a', ಕಡೆಯ ಪದವನ್ನು 'l' ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'n' ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಹಾಗಾದರೆ ಸೂತ್ರವೇನು ?

ರವಿ : $\frac{1}{2} \times n \times (a+l)$. ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಪದಗಳಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯಾದರೆ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದೇ ಸೂತ್ರವು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದು: 4, 11, 18, 25 ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಾವದನ್ನು ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಮಾಡೋಣ.

4 11 18 25 4 11 18 25

ರವಿ : ಸಮಸ್ಥಾನಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಯ ಮೊತ್ತ 29, 4 ಜೋಡಿಗಳಿವೆ. 4 ಜೋಡಿಗಳ ಮೊತ್ತ 4×29 : ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವುದು ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ ಮಾತ್ರ, ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{2}\times 4\ \times 29$. ಅರೆ, ಇದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಚೆನ್ನಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ನೀವು ನಮಗೆ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪದಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗೆ. ಇದು ಹೇಗೆ ?

ಅಪ್ಪ: ಇದು ಒಂದೇ ಸೂತ್ರದ ವಿವಿಧ ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳು. $\frac{1}{2}\times n\times(a+l)$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಇದು $\frac{n\times(a+l)}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{1}{2}\times n\times(a+l)$ ಅಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ $\frac{(a+l)}{2}$ ಸರಾಸರಿ. ನಮ್ಮ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಅದು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n. ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೊದಲ ವಿಧಾನ $(a+l)$ ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕಡೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ. $\frac{1}{2} \times n$ ಎಂಬುದು ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಪದಗಳಿದ್ದಾಗ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಎರಡನೇ ವಿಧಾನ.

3. ಮಾಯಾ ಆಯತಗಳು

ಅಪ್ಪ : ಯಾವುದಾದರೂ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುವುದನ್ನು ಕಂಡರೆ ನಿಮಗೇನನ್ನಿಸುತ್ತದೆ.

ಸುಶೀಲ : ವಿನ್ಯಾಸ.

ಅಪ್ಪ : ಸಮನಾದ ಚೌಕಾಕಾರಗಳಿಂದ ಆಯತವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವೆ ?

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಕೆಲವು ಚೌಕಾಕಾರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆ. ನನ್ನ ರಚನೆ ಹೀಗಿದೆ.

ಇದು ಆಯತ

ಅಪ್ಪ : ಬಹಳ ಚೆನ್ನಾಗಿದೆ. ಈ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ನೀವು ಇಚ್ಛಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾತೃಕೆ (matrix) ಎನ್ನಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ಅದನ್ನು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವೆ.

2	3	4	5
9	10	11	12

ಅಪ್ಪ : ಇದು 2 × 4 ವರ್ಗದ ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾತೃಕೆ. ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 4 ಕಂಬಸಾಲುಗಳು ಇದರಲ್ಲೇನಾದರೂ ವಿನೋದ ಕಂಡಿರಾ ?

ಸುಶೀಲ : ನನಗೆ ಹೊಳೆಯಿತು.

2 + 12 = 14
3 + 11 = 14
4 + 10 = 14
5 + 09 = 14

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಮಾಯಾ ಆಯತ.

ರವಿ : ನನ್ನ ಆಯ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿದೆ :

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

ಇದು 5 × 3 ವರ್ಗ, ಮಾತೃಕೆ (ಶ್ರೇಣಿ, order) ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು ಇದರಲ್ಲೇನು 'ಮಾಯೆ'ಯಡಗಿದೆ ?

1 + 10 = 11   8 + 17 = 25
3 + 8 = 11   9 + 16 = 25
2 + 9 = 11   15 + 10 = 25

15 + 24 = 39   22 + 31 = 53
16 + 23 = 39   23 + 30 = 53
17 + 22 = 39   24 + 29 = 53 ಇತ್ಯಾದಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : 11, 25, 39, 53 ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ರವಿ : ಚೌಕಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದರಲ್ಲಿ ಮಾಯೆಯನ್ನೇಕೆ ಹುಡುಕಬಾರದು ?

5	6	7
12	13	14
19	20	21

ಅಪ್ಪ : ಮಾಯಾಚೌಕಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಾರಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

ಅಪ್ಪ : ಇದರ ವರ್ಗವೇನು ?

ಸುಶೀಲ : 4 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು, 6 ಕಂಬಸಾಲುಗಳು.

ಅಪ್ಪ : ಅಂದರೆ 4 × 6, ಸರಿಯೇ ? ಇದರಲ್ಲೇನಿದೆ ಮಾಯೆ ?

2 + 28 = 30   9 + 21 = 30
3 + 27 = 30   10 + 20 = 30
4 + 26 = 30   11 + 19 = 30
5 + 25 = 30   12 + 18 = 30
6 + 24 = 30   13 + 17 = 30
7 + 23 = 30   14 + 16 = 30

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನು ಉಪಮಾಯಾ ಆಯತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇನ್ನಷ್ಟು ಮಾಯೆಯನ್ನು ಹುಡುಕಬಹುದು.

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ. ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಯೋಚಿಸುವುದು ಬೇಡ.

4. ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕಗಳು

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಈಗ ಚೌಕಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೋಜನ್ನು ಹುಡುಕಲಿದ್ದೇವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ, ಹಾಗಾದರೆ ಸುಶೀಲಳು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಿ.

ರವಿ : ಯಾವ ವರ್ಗ ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : 2 × 2 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ 2ರ ವರ್ಗ

1	2		3	4
8	9		10	11 ಸರಿಯೇ ?

ರವಿ : ಯಾಕಲ್ಲ ?

10	11	ಮತ್ತು	20	21
17	18		27	28

ಅಪ್ಪ : ಅದೂ ಕೂಡ ಸರಿಯೇ. ಇವುಗಳಲ್ಲೇನಿದೆ ಮಾಯೆ ?

ಸುಶೀಲ : 1 + 9 = 10   3 + 11 = 14   10 + 18 = 28   20 + 28 = 48

2 + 8 = 10   4 + 10 = 14   11 + 17 = 28   21 + 27 = 48

ಪ್ರಸಾದ್ : ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತಗಳೂ ಸಮನಾಗಿವೆ. ನಾವು 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕ ಮಾತೃಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ?

ರವಿ : ಇಲ್ಲೊಂದಿದೆ

1	2	3
8	9	10
15	16	17

ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ 1 + 9 + 17 = 27, 3 + 9 + 15 = 27

ಅಪ್ಪ : ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತವೇನು ?

ಸುಶೀಲ : 8 + 9 + 10 = 27.

ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತವು ಅದೇ ಆಗಿದೆ. ಮಧ್ಯದ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವೆ. 2 + 9 + 16 = 27 ಅರೆ !

ಇದರ ಮೊತ್ತವೂ ಸಮನಾಗಿದೆ. 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕಡೆಯ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೇಕೆ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ? ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಯಾಕೆ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ?

ಅಪ್ಪ : ಆಗ ಅದು ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ರವಿ : ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕ. ಅಪ್ಪ ನಾನು ಇಲ್ಲಿ ಏನಾದರೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎನಿಸುತ್ತಿದೆ. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕದಲ್ಲಿ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಪದವನ್ನು 3 (ಚೌಕದ ಕ್ರಮ)ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೇ ? ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 20, ವರ್ಗ –3, ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ : 20 × 3 = 60

ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ 12 + 20 + 28 = 60 ಮತ್ತು 14 + 20 + 26 = 60

ಸುಶೀಲ : ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ 19 + 20 + 21 = 60

ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯದ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತವು 13 + 20 + 27 = 60

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅದ್ಭುತ ! ನಾವು 4ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು, ನೀವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ 4ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾತೃಕೆಯವರೆವಿಗೂ ಮಾತ್ರ ಹೋಗಬಹುದು. ಗಮನಿಸಿ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 31ರ ಆಚೆಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕು. ಆದರೂ ಅಲ್ಲಿ ಮಿತಿಯುಂಟು. ಅದೇನೆಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ರವಿ : ನಾವು ಎಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುತ್ತೇವೆಯೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯದ ಹೊರತು ಅದನ್ನು ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ?

ಸುಶೀಲ : 7 ಕಂಬಸಾಲುಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ, 7ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾಯಾ ಚೌಕದವರೆಗೂ ಹೋಗಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅದ್ಭುತ ಅಲ್ಲವೇ ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ಒಪ್ಪಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ 4ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ರವಿ :

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

ಇದು ನಾಲ್ಕನೇ ಕ್ರಮದ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ.

ಸುಶೀಲ : 4 + 12 + 20 + 28 = 64

7 + 13 + 19 + 25 = 64

ಪ್ರಸಾದ್ : 5 + 6 + 26 + 27 = 64

11 + 18 + 14 + 21 = 64

12 + 13 + 19 + 20 = 64

4 + 7 + 25 + 28 = 64

ಅಪ್ಪ : ನೀವೇನು ಮಾಡ್ತೀದ್ದೀರಾ ಅಂತ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಾ? 32ರ ಪೂರಕ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೀರಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಿಜ. ಮಾಯಾ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರಕ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ರವಿ : ಅಪ್ಪ, ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಅದು ಒಳ್ಳೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ, ಅದನ್ನು ಮುಂದೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡುವ ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಮಾಡು. 3ರ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ, ಮಧ್ಯದ ಪದವನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರಿ. ಈ 4ರ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹಾಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವು ಸಿಗುವುದು.

4ರ ವರ್ಗದ ಮಾತೃಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

ರವಿ : ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವು $(2 + 26) \times 2 = 56$.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು 5 ಮತ್ತು 23ರ ಮೊತ್ತವಾದ 28ನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇನೆ.

ಅಪ್ಪ : ಇದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇಂಥಹುದೇ ಇನ್ನೂ ಬೇರೆ ದಾರಿಗಳಿವೆ.

ರವಿ : ಒಂದು ವೇಳೆ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಚೌಕದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೇಕಾದರೆ ?

ಅಪ್ಪ : ಯಾವುದಾದರೂ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕ ತೆಗೆದುಕೋ. ಅದರ ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೇಳು.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಒಂದು 3ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾತೃಕೆ ಆರಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆ 12.

ಅಪ್ಪ : ಹಾಗಾದರೆ ನಿವ್ವಳ ಮೊತ್ತ 180.

ಸುಶೀಲ : ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡೋಣ

12	13	14		
19	20	21		
26	27	28		
57	60	63	=	180

ಸರಿ !

ರವಿ : ನನಗದು ತಿಳಿಯಿತು. ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 9ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು.

ಸುಶೀಲ : ಆದರೆ ನಾನು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಲಿಲ್ಲ.

ರವಿ : ಹಾಗಾದರೆ ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ 8ನ್ನು ಕೂಡು, ಸರೀನಾ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದ್ಭುತ ಆಲೋಚನೆ! ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಏಕೆ? ಬಲ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 6ನ್ನು ಕೂಡು, ಕೂಡಿದಾಗ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು 9ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಿವ್ವಳ ಮೊತ್ತ ಸಿಗುವುದು.

ಅಪ್ಪ : ಅರೆ ! ನೀವು ಈ ಆಟದ ರಹಸ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರಿ ! ಒಳ್ಳೆಯದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನು ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತೇನೆ. 4ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕ ಕೊಡಿ. ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ, ನಾನು ನಿವ್ವಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇನೆ.

ಸುಶೀಲ : ನನ್ನ 4ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕದ ಎಡಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆ 4.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಿವ್ವಳ ಮೊತ್ತ 256.

ಸುಶೀಲ : ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುವೆ.

4	5	6	7		
11	12	13	14		
18	19	20	21		
25	26	27	28		
58	62	66	70	=	256

ರವಿ : ಸ್ವಲ್ಪ ತಡಿ, ನಾನು ರಹಸ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇನೆ. ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು 4ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ (diagonal elements) ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು 28 ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 3 ಸ್ಥಳವನ್ನು ದಾಟಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ 4ಕ್ಕೇ 8ನ್ನು ಮೂರು ಸಾರಿ ಕೂಡು. 4ಕ್ಕೆ 28ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 32 ಸಿಗುವುದು. 32ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 64, 64ನ್ನು 4ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 256 ನಿವ್ವಳ ಮೊತ್ತ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದ್ಭುತ ಮತ್ತು ಮಹತ್ತರವಾಗಿದೆ !

5. ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಅಪ್ಪ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಣೆಯು ಕೆಲವು ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಅದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಸುಶೀಲ : ನಮಗೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಕೊಡಿ ನಾವು ಬಗೆಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಅಂತಹದ್ದು ಇಲ್ಲಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು 3ನೇ ವರ್ಗದ ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮೂರನೇ ವರ್ಗದ ಕ್ರಾಸ್‌ನ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ತುಂಬಿಸು.

ಸುಶೀಲ : ಅದಕ್ಕೆ ಹಲವು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ನಾನು ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವೆ.

	3			13	
9	10	11	19	20	21
	17			27	

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ, ಒಳ್ಳೆಯದು ನಾನೇನಾದರೂ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟರೆ ? ಮೊತ್ತ 42 ಆಗಿರಲಿ. ನೀನು 3ನೇ ವರ್ಗದ ಕ್ರಾಸ್ ಬರೆಯುವೆಯಾ ?

ರವಿ : ನಾನು ಮೊದಲು ಮಧ್ಯದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. $\frac{42}{3} = 14$, 14ರಿಂದ 7ನ್ನು ಕಳೆದು, ಮತ್ತು 14ಕ್ಕೆ 7ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ, ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. 14ರಿಂದ 1ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಮತ್ತು 14ಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಿಗುವುದು.

	7	
13	14	15
	21	

ಪ್ರಸಾದ್ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರ ಬೇಕಾದರೆ, ನಾನು 1 ಮತ್ತು 7ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ರೀತಿಯಲ್ಲದ ಪರಿಹಾರಗಳೂ ಉಂಟು. ಮೊತ್ತವನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆದನಂತರ, ನಾವು ಯಾವುದಾದರೂ ಅನುಕೂಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ (ಉದಾ: 3) 3ನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು 14 ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 3ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು (11 ಮತ್ತು 17). ಅನಂತರ ನಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

(ಉದಾ: 2) 2ನ್ನು ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು (12 ಮತ್ತು 16).

	11	
12	14	16
	17	

ರವಿ : ನಾವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : 3ರ ವರ್ಗದ ನಂತರ, ನಾವು ಈ ರೀತಿಯ 5ರ ವರ್ಗದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ನನಗೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ರವಿ : ಏಕೆ ? ಕಾರಣ ಹೇಳು. ನನಗೆ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಮೊತ್ತ ಕೊಡು, ನಾನು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಸರಿ ಮೊತ್ತ 55

ರವಿ : ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11. 2ನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಳೆದಾಗ 9 ಮತ್ತು 7 ಸಿಗುತ್ತವೆ. 2ನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಕೂಡಿದಾಗ 13, 15 ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೋಗಬಹುದು. 3ನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 11ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ 8,5 ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಡಭಾಗದ ಕೋಶಗಳಿಗೆ ಹಾಕಬಹುದು. 3ನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 11ಕ್ಕೆ ಕೂಡಿದಾಗ 14, 17 ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇವು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಲಭಾಗದ ಕೋಶಗಳಿಗೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಪರಿಹಾರ ಹೀಗಿದೆ:

		7		
		9		
5	8	11	14	17
		13		
		15		

ನನಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ದಾರಿ ಹೊಳೆಯುತ್ತಿದೆ. 11 ಮಧ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ನಾವೇಕೆ 5 ಪದಗಳ ಎರಡು ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಹೊಂದಬಾರದು ?

ಅಪ್ಪ : ಅದಿನ್ನೂ ಚೆನ್ನ. ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸೋಣ. 25, 26, 27, 28, 29 ಎಂಬ 5 ಪದಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು 3ನೇ ವರ್ಗದ ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವಿರಿ?

ರವಿ : ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮಧ್ಯ ಕೋಶದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕು. ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ (ಕ್ರಾಸ್) ಹೀಗಿದೆ.

	26	
25	27	29
	28	

ಪ್ರಸಾದ್ : ನೀನು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸ್ಮಾರ್ಟ್ ಆಗಿದ್ದೀಯಾ. ನಾವು 2 ಮತ್ತು 1ನ್ನು ಕಳೆಯುವ ಮತ್ತು ಕೂಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಒಳ್ಳೆಯ ಜೋಡಣೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ.ನನಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಯೋಚನೆ (idea) ಹೊಳೆಯುತ್ತಿದೆ. ಆ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿರ ಬೇಕೆಂದು ಏನೂ ಇಲ್ಲ ಅವು ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಸಾಕು. ನಾನು 7, 11, 15, 19, 23ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಹುಶಃ ಕ್ರಾಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

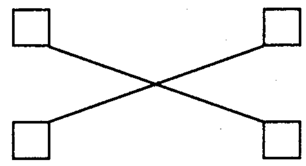
ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲೇ ?

	11	
7	15	23
	19	

ನನಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತು.

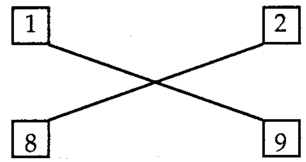
6. ನಕ್ಷತ್ರಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಅಪ್ಪ : ನಾವು ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ನಾವು ನಕ್ಷತ್ರಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚನೆ ಮಾಡೋಣ.



ಇದು 2ನೇ ವರ್ಗದ ನಕ್ಷತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆ. ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವಿರಿ ?

ಸುಶೀಲ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಬಳಸಿದರೆ ಅದು ಸುಲಭ.



ನಕ್ಷತ್ರ ಮೊತ್ತ 10 ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಹೀಗಿದೆ.

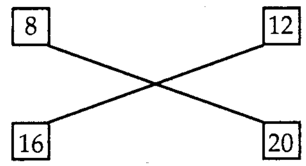
ರವಿ : ನೀವು ನಕ್ಷತ್ರ ಮೊತ್ತ ಕೊಟ್ಟರೆ, ನಾನು ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ ನಕ್ಷತ್ರ ಮೊತ್ತ 28.

ರವಿ : 28ನ್ನು ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

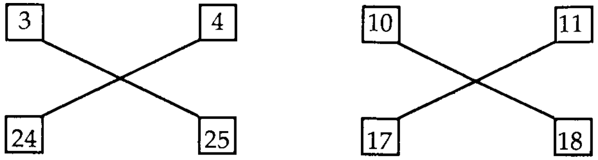
$28 = 20 + 8$, $28 = 12 + 16$

ಉತ್ತರ ಇಲ್ಲಿದೆ.



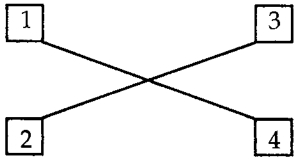
ಅಪ್ಪ : 20 ಮತ್ತು 8ಗಳು 28ರ ಒಂದು ಪೂರಕ ಜೋಡಿ. ಹಾಗೆಯೇ 12 ಮತ್ತು 16. ನಿನಗೆ ಇಷ್ಟವಿದ್ದರೆ ಈ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ಆದರೆ ಇದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರ ಬೇಕಿದ್ದಲ್ಲಿ ನಾನು ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು.



ರವಿ : ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಕ್ಷತ್ರ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

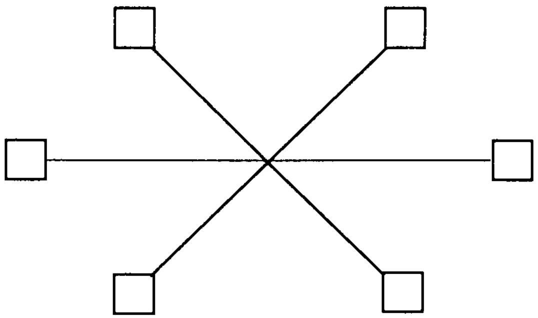
ಸುಶೀಲ : ನನಗೆ ಹೊಳೆಯಿತು:–



ನಾನು ಸಮಸ್ಥಾನೀಕರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು

1 2 3 4

ಪ್ರಸಾದ್ : ಒಳ್ಳೆಯ ಉತ್ತರ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು 3ನೇ ವರ್ಗದ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ? ಇದರ ಕೋಶಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ಬಗೆ ಹೇಗೆ ?



ರವಿ : ಇದು ಸರಳ. ಇದೇನಿದ್ದರೂ ಮಧ್ಯದ ಸಾಲನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬರೆದ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾಯಾಚೌಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಷ್ಟೆ.

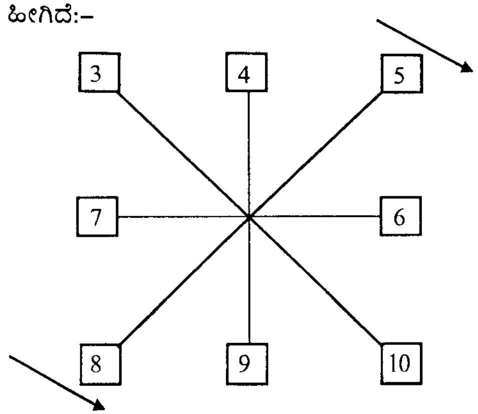
ಪ್ರಸಾದ್ : ಒಂದು ನಕ್ಷತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಅದನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಪೂರಕ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ಅರೆ ! ಹೌದು, ನೀವು ಹಾಗೆ ಹೇಳಬಹುದು. ನೋಡಿ ನಾನೀಗ 3, 4, 5, 6, 7,

8, 9, 10 ಎಂಬ 8 ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇನೆ. 4ನೇ ವರ್ಗದ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ನೀವಿದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೇ ?

ರವಿ : ಜೋಡಿಗಳು ಹೀಗಿವೆ (3,10) (4,9) (5, 8) (6,7)

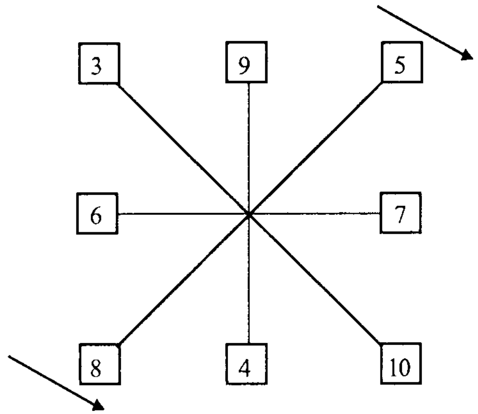
ನಕ್ಷತ್ರವು ಹೀಗಿದೆ:–



ಪ್ರಸಾದ್ : 3, 4, 5, 6 ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೋಪಾದಿಯಲ್ಲಿ (clockwise) ನಾಲ್ಕು ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿವೆ ಮತ್ತು 7, 8, 9, 10 ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೋಪಾದಿಯಲ್ಲಿ (anticlockwise) ನಾಲ್ಕು ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಅವು ಹಾಗೆಯೇ ಇರಬೇಕೇ ?

ರವಿ : ನನಗೆ ಹಾಗೆನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ಹೀಗೂ ಇರಬಹುದು:–



ಪ್ರಸಾದ್ : ಒಳ್ಳೆಯದು ! ಆದರೆ ನನಗೆ ನಕ್ಷತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ಕ್ರಮವು ಇಷ್ಟವಾಯ್ತು. ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದಂತೆಯೇ, 4ನೇ ವರ್ಗದ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ತುಂಬಲು ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 8 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು.

7. ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕಗಳು

ಅಪ್ಪ : ರವಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈಗ ಗಮನಿಸೋಣ. ನಾವು ಚೌಕಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮರು ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕ ಪಡೆಯಬಹುದೆ ?

ಸುಶೀಲ : ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು, ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳ ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಮನಾಗಿ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಅರ್ಥವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು, ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ರವಿ : ಅದು ಅದ್ಭುತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪ್ಪ : ನಾವೀಗ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ 2ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಸುಶೀಲ : 2ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕವು ಇಲ್ಲಿದೆ

1	2
8	9

ನಾನೆಷ್ಟೇ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೂ ಇದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಲಿಲ್ಲ.

ರವಿ : ಅವಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವೀಗ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ

1	2	3
8	9	10
15	16	17

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವೆ

$8 + 9 + 10 = 27$

$2 + 9 + 16 = 27$

$17 + 9 + 1 = 27$

$3 + 9 + 15 = 27$

ರವಿ : ನೀನು ತುಂಬಾ ಬೇಗನೇ ಮಾಡುತ್ತೀ !

ಸುಶೀಲ : ಇಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲ. ಇವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲವೇ ? ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೊತ್ತವು 3×9 ಅಥವಾ 27.

ರವಿ : ಮಾಯಾಮೊತ್ತವು $3 \times 9 = 27$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪುನರ್ಜೋಡಿಸಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ? ಏನಾದರೂ ಸುಳಿವು ಕೊಡಿ ಅಪ್ಪಾ.

ಅಪ್ಪ : ನೀವಿದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದಷ್ಟೇ ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ trial and error ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲೊಂದು ಗುಪ್ತವಾದ ವಿನ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅದನ್ನು ನೋಡುವುದನ್ನು ಮೊದಲು ಕಲಿಯಿರಿ. ನೀವೀಗ 1, 2, 3ರಿಂದ 8, 9, 10 ನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವಿರಿ ?

ಸುಶೀಲ : 1, 2, 3 ಕ್ಕೆ 7ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ 8, 9, 10 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ರವಿ : 1, 2, 3 ಕ್ಕೆ 14ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ 15, 16, 17ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು, 1, 2, 3ರಿಂದ 1, 2, 3ನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವಿರಿ ?

ಸುಶೀಲ : '0' ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ 1, 2, 3ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಪ್ಪ : ನಾವೀಗ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಏನೆಂದರೆ 1, 2, 3 ಹಾಗೂ 0, 7, 14ರಿಂದ ಎರಡು ಪೂರಕ (ಮೊದಲ ಹಂತದ) ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳೆಂದರೇನು ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ನಾನು ಅದನ್ನೇ ವಿವರಿಸುವವನಿದ್ದೆ. ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೂ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಹಾಗೂ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ರವಿ : ಕರ್ಣಾಂಶಗಳೆಂದರೇನು ?

ಅಪ್ಪ : ಕರ್ಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕಕ್ಕಿಡೋಣ. ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ಕಂಬಸಾಲು, ಅಡ್ಡಸಾಲು ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮನಾಗಿರಬೇಕೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಇಲ್ಲ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕು.

ರವಿ : ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡನೇ ವರ್ಗದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನೂ ರಚಿಸಬಹುದು.

1	2
2	1

ಸುಶೀಲ : 1, 2 ಮತ್ತು 3ರಿಂದ ಒಂದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಕೇಂದ್ರ ಕೋಶದಲ್ಲಿ 2 ಇರಬೇಕು.

1		
	2	
		3

1	3	2
3	2	1
2	1	3

ಅರೆ ನಾನು ರಚಿಸಿದೆ !

ರವಿ : ನಾನು 0, 7, 14 ರಿಂದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರುವೆ ನೋಡಿ

0	14	7
14	7	0
7	0	14

ಸುಶೀಲ : ಅವನ ಚೌಕ ನನ್ನ ಚೌಕದ ಹಾಗೆ ಇದೆಯಪ್ಪ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹೌದು ಸ್ಥಾನಾಂತರವನ್ನು ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

1 → 0

2 → 7

3 → 14

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು ಬಾಣದ ಗುರುತು 'ಸ್ಥಾನಾಂತರ'ವೆಂದು ಅರ್ಥವೇ ? ಸರಿ. ನೀವು ಈಗ ಈ ಎರಡೂ ಪೂರಕ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ ರಚಿಸಿ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಮಾಡುವೆ

1+0	3+14	2+7
3+14	2+7	1+0
2+7	1+0	3+14

ನಮಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ್ದು ಇದು.

1	17	9
17	9	1
9	1	17

ರವಿ : ಮತ್ತೊಂದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕ, ಅಪ್ಪ.

ಅಪ್ಪ: ಒಂದು ವೇಳೆ ನೀವು 0, 7, 14ರಿಂದ ವಿವಿಧ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ನಂತರ ಅದನ್ನು ಕೂಡಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

1, 2, 3ರ ಕ್ರಮ ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಆಗಿತ್ತು 0, 7, 14ನ್ನು ಬಲ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಕರ್ಣದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಡ ಕೆಳಭಾಗದವರೆವಿಗೂ ತುಂಬುತ್ತೇನೆ

		0
	7	
14		

→

7	14	0
0	7	14
14	0	7

ರವಿ : ಕೋಶದೊಂದಿಗೆ ಕೋಶ ಕೂಡಿ, ಸಂಯುಕ್ತ ಚೌಕ ಪಡೆಯುವೆ:–

1	3	2
3	2	1
2	1	3

+

7	14	0
0	7	14
14	0	7

=

8	17	2
3	9	15
16	1	10

ಇದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವಲ್ಲ. ಇದು ಮಾಯಾಚೌಕವೇ ?

ಹೌದು, ನನಗದು ತಿಳಿಯಿತು. ಇದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾಯಾಚೌಕವಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಅಪೂರ್ಣವೋ ಪೂರ್ಣವೋ ?

ಸುಶೀಲ : ಇದರ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

8 + 17 + 2 = 27, 16 + 1 + 10 = 27, 8 + 3 + 16 = 27, 2 + 15 + 10 = 27

ಅರೆ ! ಇದು ಪಕ್ಕಾ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕ.

ಅಪ್ಪ : ಅದಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ. ಅಲ್ಲಿ ಮತ್ತಷ್ಟು ಮಾಯಾ ಗುಣಗಳು ತೋರುತ್ತಿವೆ.

ಸುಶೀಲ : ಅದೇನು ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ಪ್ರತಿ ಕೋಶದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು (square) ಬರೆಯುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡು.

ರವಿ : ಇದು ಇಲ್ಲಿದೆ. ಸರಿಯೇ ?

64	289	4
9	81	225
256	1	100

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವೀಗ ಇದನ್ನು ಮಾಯಾಚೌಕವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಇದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವಲ್ಲವೆಂದು ನಾನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇನೆ. ಆದರೆ ಇದು ಹೊಸ ಮಾದರಿಯ ಅಪಕ್ವ ಮಾಯಾಚೌಕವಾಗಿದೆ.

64	289	4	357
9	81	225	
256	1	100	357
329		329	

ಅಪ್ಪ : ಅದರ ಅರ್ಥವೇನು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಕಡೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿವೆ.

ಅಪ್ಪ: ಇದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿ ಬರೆಯುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಂದರ್ಭಿಕವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುತ್ತಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಲ್ಲೆಯಾ ?

ರವಿ : ನಾವು ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ನೋಡಬೇಕು. ನಿಜಕ್ಕೂ ಸೋಜಿಗ !

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾಲ್ಕನೇ ವರ್ಗದ ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಗೆ ? ನಾವು ಅದನ್ನು ಪುನರ್ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು, ನೀವು ಮಾಡಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಪ್ಪ ನಮ್ಮನ್ನು ನೋಡಿ, ಇದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ನಾವು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾಗಣಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವುದು? ಈ ಚೌಕವು 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4 ಹಾಗೂ 0, 7, 14, 21 ಎರಡೂ ಗಣಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ. 1, 2, 3, 4ಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ, ಉಳಿದವನ್ನು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯೋಣ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವು ಮೊದಲು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ವರ್ಗವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಅದನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸೋಣ.

ಸುಶೀಲ : ಮಧ್ಯದ ಕೋಶವಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡುವುದು?

ರವಿ : ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

ಪ್ರಸಾದ್ : ಒಳ್ಳೆಯದು 0, 7, 14, 21ರಿಂದ ನಾನು ಇನ್ನೊಂದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ. ಬಲಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೂಲೆಯಿಂದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ 4ಗಳು ಕಾಣುತ್ತಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ 21ಗಳು ಎಡಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೂಲೆಯಿಂದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು. 1, 2, 3, 4 ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ 0, 7, 14, 21 ಕಡೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರಬೇಕು. ನನಗದು ಹೊಳೆಯಿತು. ಎರಡೂ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಕೋಶದಿಂದ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕೂಡೋಣ.

21			
	21		
		21	
			21

→

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

ರವಿ : ಅದನ್ನು ನಾನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.

1+21	0+2	3+7	4+14
2+14	3+21	4+0	7+1
3+7	14+4	1+21	2+0
4+0	1+7	2+14	3+21

→

22	2	10	18
16	24	4	8
10	18	22	2
4	8	16	24

ಇದು ತುಂಬಾ ಕೆಟ್ಟದಾಗಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಹೌದು 24 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ, 8 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. 18, 10 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿವೆ. ಇದು ಒಳ್ಳೆಯ ಯೋಚನೆ ಅಲ್ಲವೇ ಅಲ್ಲ. ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ. ನಾವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಿಂದ ಪಡೆದ ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವೂ ಇದಾಗಲಿಲ್ಲ !

ಪ್ರಸಾದ್ : ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವೂ ಸಿಗಲಿಲ್ಲ ! ಅಪ್ಪ ನಾವು ಸೋತೆವು.

ಅಪ್ಪ : ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. 1, 2, 3, 4 ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ನಿಮಗೆ ರಚಿಸಿ ಕೊಡುವೆ.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಇದೂ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವೇ ? ಅದು ಸರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾನು ಸ್ಥಾನಾಂತರ ಯೋಜನೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕ ರಚಿಸಿದರೆ

1 → 0
2 → 7
3 → 14
4 → 21

ಎರಡೂ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕೋಶದಿಂದ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕೂಡಿದಾಗ ನಾವು ಅದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ ?

ರವಿ : ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡುತ್ತೇನೆ.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	7	14	21

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಿಲ್ಲು! ನಾವು ಎರಡನೇ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ಬೇರೆಯ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು.

ರವಿ : ಸರಿ. ನಾವೀಗ ಮೊದಲ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ವಿಭಿನ್ನ ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ಅಂದರೆ ನೀನು ಅದೇ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತೀಯಾ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹೌದು.

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

+

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು ಮುಂದುವರೆಸಿ.

ರವಿ : ನಾವೀಗ ಕೂಡಬೇಕು.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

ಮತ್ತು

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

ಕೋಶದಿಂದ ಕೋಶಕ್ಕೆ

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಕೂಡುತ್ತೇನೆ.

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ! ನಾವೀಗ 1, 10, 16, 25ರಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ಪಡೆದೆವು.

ಅಪ್ಪ : ನೋಡಿ, ನೀವು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗಿನ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವದನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ನನಗೀಗ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತು. ನಾನು ಸರಿಯೇ ? ನೋಡಿ 2ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ಅದನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು .

1	2
3	4

3	4
1	2

2	1
4	3

4	3
2	1

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ 5. ಇಲ್ಲಿ 1, 3 ಮತ್ತು 2, 4ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬದಂತಿವೆ. 3ನೇಯದ್ದು 1ನೇಯದರ ಕೆಳಗಿದೆ ಹಾಗೂ 4ನೇಯದ್ದು 2ನೇಯದರ ಕೆಳಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಬಹಳ ಒಳ್ಳೆಯದು. ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು 0, 7, 14, 21ರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮುಂದುವರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

ರವಿ : ಕರ್ಣಾಂಶ ಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮನಾಗಿರಬಾರದು. ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು, ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಕರ್ಣಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಸ್ಥಾನಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು (0,21) ಮತ್ತು (7, 14) ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕೇ ?

ರವಿ : ನಾವು ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣವೇ ?

0	21
21	0

7	14
14	7

21	0
0	21

14	7
7	14

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು, 4ನೇ ವರ್ಗದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ನಮ್ಮ ಮೊದಲ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕ ಮತ್ತು ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಒಂದರ ಕೆಳಗೊಂದು ಜೋಡಣೆಯಾಗಿದ್ದವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಕರ್ಣದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಹಾಕಬೇಕು.

0	21		
21	0		
		21	0
		0	21

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

ರವಿ : ನಾನೀಗ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

=

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಪ್ಪ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದೆವು.
ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುತ್ತೇನೆ.

$1 + 4 + 25 + 22 = 52$

$11 + 8 + 15 + 18 = 52$

$1 + 23 + 17 + 11 = 52$

$24 + 4 + 8 + 16 = 52$

$9 + 15 + 25 + 3 = 52$

$18 + 10 + 2 + 22 = 52$

$1 + 24 + 9 + 18 = 52$

$23 + 4 + 15 + 10 = 52$

$17 + 8 + 25 + 2 = 52$

$11 + 16 + 3 + 22 = 52$

ಹೌದು ಇದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕ !

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಪ್ಪಾ ನನ್ನದೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ. ನಮ್ಮ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 0, 7, 14, 21 ಇವು '0'ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ 7ರ ಅನುಕ್ರಮ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು. ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುಕ್ರಮ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಿಂದ ನಾವು ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ರವಿ : 0, 6, 12, 18 ಅಥವಾ 0, 4, 8, 12 ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಎಂದರ್ಥವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹೌದು ಅದೇ.

ಅಪ್ಪ : ಯಾಕಾಗಬಾರದು ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿ

ಸುಶೀಲ : ನಾನು 1, 2, 3 ಮತ್ತು 0, 4, 8 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವೆ.

ರವಿ : ನಾನು 1, 2, 3, 4 ಮತ್ತು 0, 6, 12, 18ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4ನೇ ವರ್ಗದ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.

1	3	2
3	2	1
2	1	3

+

4	8	0
0	4	8
8	0	4

=

5	11	2
3	6	9
10	1	7

ಸುಶೀಲ : ನನಗೆ ಸಿಕ್ಕಿತು !

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	18	12	6
18	0	6	12
6	12	18	0
12	6	0	18

=

1	20	15	10
21	4	7	14
8	13	22	3
16	9	2	19

ಅಪ್ಪ : ಒಂದು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡೆಯ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರಬಾರದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನಗೆ ಹೊಳೆಯಿತು. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವೂ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡೆಯ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸುವಾಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು.

1	2	3
3	4	5
5	6	7

ನಾವು ಎರಡನೇ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊನೆಯ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಮಗೊಂದು ಸುಂದರವಾದ ಜೋಡಣೆಯು ಕಾಣಬರುತ್ತದೆ. 4ನೇ ಕ್ರಮದ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ (square matrix) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಪ್ಪ , ಕರ್ಣಸಾಲಿನ ಮೇಲೆ ಸಮಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿ ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನನಗೆ ಗೊತ್ತು :-

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಇದೇ ಕೌಶಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಮಾಡಲಾರೆವೆ ?

ಅಪ್ಪ : ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡು.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ರವಿ : ಇದು ಅಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕ. ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1 ಮತ್ತು 25, 9 ಮತ್ತು 17, 4 ಮತ್ತು 22, 10 ಮತ್ತು 16 ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು–

25	2	3	22	52
8	17	16	11	52
15	10	9	18	52
4	23	24	1	52
52	52	52	52	52

ಅರೆ ! ಹೌದು ನನಗದು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ದಾಖಲಾಗಿರುವ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ನಾನದನ್ನೇ ಹೇಳಬೇಕೆಂದಿದ್ದೆ, ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ.

	625	4	9	484	1122
	64	289	256	121	730
	225	100	81	324	730
	16	529	576	1	1122
856	930	922	922	930	996

ಸುಶೀಲ : ಅಪ್ಪ , ಇದು 3×3 ಮಾಯಾಚೌಕಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಮಾಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ, ನಾವು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಿಂದ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದೆವು.

ರವಿ : ಅಪ್ಪ , ನಾನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನೀಗಲೇ ಆ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿದ್ದೇನೆ.

ಸುಶೀಲ : ಈ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲೇಟರ್ ಬಳಸಿ ನಾನು ಮನೆ ತುಂಬುತ್ತಿದ್ದೇನೆ.

	15625	8	27	10648	26308
	512	4913	4096	1331	10852
	3375	1000	729	5832	10936
	64	12167	13824	1	26056
15808	19576	18088	18676	17812	21268

ಸುಶೀಲ : ಆಶ್ಚರ್ಯ ಅಪ್ಪ ! ಎಂಥಾ ಸೋಲು.

ಅಪ್ಪ : ಗಡಿಬಿಡಿ ಏಕೆ ? ಇದು ಸಂಶೋಧನೆಗೆ ಸವಾಲು.

ರವಿ : ನನಗೊಂದು ಯೋಚನೆ. ನಾವು ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಹೀಗೆ ಏಕೆ ರಚಿಸಬೇಕು ? ಬೇರೆ ದಾರಿ ಇಲ್ಲವೇ?

ಅಪ್ಪ : ಇದು ಒಳ್ಳೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ. 2 ಮತ್ತು 24ನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡು.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು 3 ಮತ್ತು 23, 8 ಮತ್ತು 18 , 15 ಮತ್ತು 11ನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿದ್ದೇನೆ.

ರವಿ : ಅದು ಇಲ್ಲಿದೆ.

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

ಸುಶೀಲ : ಇದು ಮಾಯಾಚೌಕವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿತೆ ?

ರವಿ : ಹೌದು, ನಾನು ಸರಿ.

	1	24	23	4	52
	18	9	10	15	52
	11	16	17	8	52
	22	3	2	25	52
52	52	52	52	52	52

ಅಪ್ಪ : ನನ್ನದೊಂದು ಸಲಹೆ, ಮಧ್ಯದ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ರವಿ : ನಾವು ಕರ್ಣಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

52 52

ಹೌದು, ನಮಗದು ಸಿಕ್ಕಿತು !

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವು ಈ ಚೌಕವನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಅಲ್ಲವೇ ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇದೇನು ಒಳ್ಳೆಯ ಆಲೋಚನೆಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ನಿನ್ನ ಅನುಮಾನ ಸರಿ. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ನಿಧಿ ಶೋಧನೆಗಾಗಿ ದಾರಿ ತೋರಬಹುದು.

ರವಿ : ಏನಪ್ಪಾ ಅದು ?

ಅಪ್ಪ : ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಚೌಕ ರೂಪಿಸಿ ನೋಡಿ.

ರವಿ : ನೀವು ಹೇಳಿದ್ದರ ಅರ್ಥ ಇದೇ ತಾನೆ ?

1	23	24	**4**
18	**10**	**9**	15
11	**17**	**16**	8
22	2	3	**25**

ಅಪ್ಪ : ಬಹಳ ಒಳ್ಳೆಯದು. ನಿಮಗದು ತಿಳಿಯಿತು.

ಸುಶೀಲ : ನಾವೀಗೇನು ಮಾಡಬೇಕು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಬಹುಶಃ ನಾವು ಮಧ್ಯಚೌಕದ ಅಭಿಮುಖ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕೇನೋ ?

ಅಪ್ಪ : ಅದೊಂದು ಚುರುಕು ನೋಟ ! ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

ರವಿ : ನಾನು ಅವುಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ, ಬೇಗ ಮುಗಿಸೋಣ.

ಸುಶೀಲ : $18^2 + 23^2 + 3^2 + 8^2 = 926$

$24^2 + 15^2 + 11^2 + 2^2 = 926$

ರವಿ : $18^3 + 23^3 + 3^3 + 8^3 = 18538$

$24^3 + 15^3 + 11^3 + 2^3 = 18538$

ಅಪ್ಪ : ನೋಡಿದಿರಾ ! ಎಂಥ ನಿಧಿ ಶೋಧನೆ ಇದು. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಮಾಯಾಗುಣ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯ 4 × 4 ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಸುಶೀಲ : ಅಪ್ಪ ನನಗೆ 3ನೇ ಕ್ರಮದ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1, 5, 9 ಮತ್ತು 3, 5, 7 ಗಳನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲಿನ ಕೋಶಗಳಿಗೆ, 2, 5, 8 ಮತ್ತು 4, 5, 6 ಗಳನ್ನು ಕರ್ಣಕೋಶಗಳಿಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತುಂಬಬೇಕು. ನಾನು ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ 3ನೇ ವರ್ಗದ ಚೌಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಯಾಚೌಕವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲೇ? ಮೊದಲು ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡುವೆ.

	1	
3	5	7
	9	

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	2	3
8	9	10
15	16	17

1, 9, 17 ಮತ್ತು 3, 9, 15 ಗಳು ಮಧ್ಯದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಹೋಗಬೇಕು.

2, 9, 16 ಮತ್ತು 8, 9, 10 ಗಳು ಕರ್ಣಸಾಲಿಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೋಗಬೇಕು.

ಅದರಿಂದ ನನಗೆ ಸಿಗುವುದು

16	1	10	27
3	9	15	27
8	17	2	27

27 27 27 27 27

ಅರೆ ! ನನಗದು ಸಿಕ್ಕೇಬಿಟ್ಟಿತು.

8. ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತದಾಟ

ಸುಶೀಲ : "ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ" ಎಂಬಂತಹ ಆಟವು ಈ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಅಪ್ಪಾ ?

ಅಪ್ಪ : ಅಂತಹ ಆಟಗಳು ಇವೆ. ಮೇ ತಿಂಗಳಿನ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ತೆಗೆದುಕೋ.

ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೋ. ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಆರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೋ. ಎರಡನ್ನೂ ಕೂಡು. ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಳಬೇಡ. ಆದರೆ ಒಂದು ನಿಯಮವಿದೆ. ನಾನು 31 ದಿನಗಳ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಬಳಸುವಾಗ ಮೊತ್ತವು 32ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿ ನನಗೆ ಮೊತ್ತವು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಅಪ್ಪ : ನಿನ್ನ ಮೊತ್ತ 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಅರೆ ! ಇದು ಅದ್ಭುತ. ನಾನು 1ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ 8 ಮತ್ತು 3ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ 17ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆ. ಮೊತ್ತ 25 ಆಯ್ತು, 25 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರಿ, ಅಪ್ಪ ?

ರವಿ : ಅಪ್ಪ ನಾನು 2ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಮತ್ತು 4ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ.

ಅಪ್ಪ : ನಿನ್ನ ಮೊತ್ತವು 6ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ರವಿ : ಸರಿ ! ನಾನು 16ನ್ನು 2ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ, 4ನ್ನು 4ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಆರಿಸಿದೆ. ಮೊತ್ತ 20, 6ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಒಂದೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಹಾಗಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಸುಶೀಲ : ಮೊತ್ತವು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಅಪ್ಪ : ನಿನ್ನ ಮೊತ್ತವು ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿಯಾಗಿದೆ. ನಾನು 11 ಮತ್ತು 18ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. 29 ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. ಅರೆ ! 4 + 4 = 8, 8 ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನ್ನದೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಿದೆ. ನಾನು 1ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 22, 3ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 10 ಆರಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತ 32 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ 32 ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ : ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನೀನು 31ಕ್ಕೆ ನಿಲ್ಲದೆ ಮತ್ತು 31ರಾಚೆಗೆ ಮುಂದುವರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೋ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನನ್ನ ಮೊತ್ತವು 4ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. ಆ ರಹಸ್ಯವನ್ನು ನಾನು ಹೇಳಲೇ ? ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆಯೋ ಆ ಸಾಲುಗಳ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಯಾವ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆಯೋ, ಆ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಿರುತ್ತದೆ !

ಅಪ್ಪ : ಇದು ಅದ್ಭುತ !

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಿದೆ. 4ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 11 ಮತ್ತು 6ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 20 ಆರಿಸಿ ಕೂಡಿದಾಗ 11 + 20 = 31 ಮತ್ತು 4 + 6 = 10 ಆದರೆ 10ನೇ ಸಾಲೇ ಇಲ್ಲವಲ್ಲ ?

ರವಿ : ಆದರೆ 31, 3ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : 3ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 10 ಇದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : 10 ಇರುವ ಸಾಲನ್ನು ಹುಡುಕಬಹುದು. ಆದರೆ 10ನ್ನು ಹುಡುಕದೇ 3ನೇ ಸಾಲನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಅಪ್ಪ : ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅದರ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿದೆ. ನೀನು ಹುಡುಕಬಲ್ಲೆಯಾ ?

ರವಿ : ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 7 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಕಡೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಪ್ರತಿ 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 1ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಯಾವುದೇ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆ ಶೇಷವೇ ಆ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ಆದರೆ 4ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಹೇಗೆ ಭಾಗಿಸುವುದು?

ರವಿ : ನನಗೆ ಗೊತ್ತು. 4ರಲ್ಲಿ 7ಗಳು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 4:–

$$\begin{array}{r} 0 \\ 7\overline{)4} \\ \underline{0} \\ 4 \end{array}$$

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದು ಸರಿ.

ರವಿ : ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಕಂಬಸಾಲಿನಾಟದಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7ಗಳು ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸರಿಯೇ ?

ಸುಶೀಲ : 7ರಿಂದ 7ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು "0" ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : 0ಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 7 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡಿ ಏನಾಗುವುದು

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
				... ಮತ್ತು ಮುಂದುವರೆಯುವುದು		

ಸುಶೀಲ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಜೋಡಣೆಯ ಕಡೆಯ ಸಾಲು ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇತರೆ ಸಾಲುಗಳು ಮುಂದಿನ ಸಾಲುಗಳಿಗೆ ತಳ್ಳಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲ ಸಾಲನ್ನು ಶೇಷ 0 ಅಥವಾ remainder R_0 ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಎರಡನೇ ಸಾಲನ್ನು ಶೇಷ 1 ಅಥವಾ R_1 ಎಂದು ಕರೆದು ಮುಂದುವರೆಸಬಹುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು 6 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ '0'ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಬರೆದರೆ ನಮಗೇನು ಸಿಗುತ್ತದೆ ?

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಬರೆದು ನೋಡುತ್ತೇನೆ.

0	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	–ಹೀಗೆ

ರವಿ : ನಮಗೆ '0' ಶೇಷ, 1 ಶೇಷ ಮುಂತಾದ ಶೇಷವು ಕೊನೆಯಾಗುವವರೆಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದವು.

ಅಪ್ಪ : ನಾನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು ?

ಸುಶೀಲ : 6

ಅಪ್ಪ : ನಾವು ಎಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 8ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ಶೇಷಗಳು ನಮಗೆ ಸಿಗುವವು ? ಅವು ಯಾವುವು ?

ರವಿ : 8. ಅವು $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$

ಅಪ್ಪ : ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗೌಸ್ 'ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧ' (congruence relation) ಎಂದು ಕರೆದ, ಅದಕ್ಕವನು ಸುಂದರವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ.

(Congruency) $9 \equiv 23 \pmod 7$

(9 ಮತ್ತು 23 ಸರ್ವಸಮನಾಗಿ congruent ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಓದಬೇಕು.)

ಪ್ರಸಾದ್ : 7ರಿಂದ 9ನ್ನು ಮತ್ತು 23ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಮನಾದ ಶೇಷವನ್ನು (2)ನೀಡುವುದು ಎಂದರ್ಥ.

ಅಪ್ಪ : ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಎಂದರೆ ಅಳತೆ ಎಂದರ್ಥ. 9 ಮತ್ತು 23ನ್ನು 7ರ ಮಾನದಿಂದ ಅಳೆದಾಗ ಶೇಷಗಳು ಸಮ.

ರವಿ : 9 ಮತ್ತು 23ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 14. 9 ಮತ್ತು 23ರ ಅಂತರವು 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ನಾವು ಹಾಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧವು (Congruency) ಸಮ ಸಂಬಂಧದಂತೆಯೇ (equality) ವರ್ತಿಸುವುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಾಗೆಂದರೆ ಅರ್ಥವೇನು ?

ಅಪ್ಪ : $a = b$ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $a + c = b + c$ ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೇ $c = d$ ಆದಾಗ $a + c = b + d$ ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ? ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ನನಗೆ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. 2ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ $9 \equiv 23 \pmod 7$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$9 + 2 \equiv 23 + 2 \pmod 7$ ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ $10 \equiv 17 \pmod 7$

ಐದನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ $9 + 10 \equiv 23 + 17 \pmod 7$

ಅರೆ ! ಇದೇ ನಮ್ಮ ಕಂಬಸಾಲು ಮೊತ್ತದಾಟ.

ರವಿ : ನಾವು ಸಾಲುಗಳ ಅಂತರದಾಟವಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ನೀವು ಅದನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. 5–3ನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಂಶ್ಲೇಷಿಸುವಿರಿ ?

ರವಿ : 5ರಿಂದ 3ನ್ನು ಕಳೆ. ಹಾಗೂ '–3' ನ್ನು 5ಕ್ಕೆ ಕೂಡು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹೌದು, ವ್ಯವಕಲನವೆಂದರೆ ಎರಡು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ.

ಅಪ್ಪ : ಸಂಕಲನವು ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಆವರಿಸುತ್ತದೆ. ವ್ಯವಕಲನದ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಮಾತನಾಡಬೇಕಿಲ್ಲ.

ಸುಶೀಲ : ನಾವು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಆಟವಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : 2ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 9, 3ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ 3ನ್ನು ಆರಿಸಿ ಗುಣಿಸು. ಉತ್ತರವು $3 \times 2 = 6$, ಉತ್ತರವು 6ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಹೌದು,

ಅಪ್ಪ : $a = b$ ಸಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $ac = bc$ ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ? $c = d$ ಆದಾಗ, $ac = bd$ ಅಲ್ಲವೇ ? ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಇರಬಾರದೇನು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನಗೆ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು ಎಂದೆನಿಸುತ್ತದೆ.

1ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ, $8 \equiv 15 \pmod 7$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಈಗ $8 \times 2 \equiv 15 \times 2 \pmod 7$ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

2ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ $2 \equiv 9 \pmod 7$

$8 \times 2 \equiv 15 \times 9 \pmod 7$

$16 \equiv 135 \pmod 7$

ಇದು ಸರಿಯೆ ?

ರವಿ : 135 – 16, ಅಂದರೆ 119 ಎಂಬುದು 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು

$119 = 7 \times 17$, ಹೌದು, ಇದು ಸರಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವು ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ $a^2 \pmod{b^2}, a^3 \pmod{b^3}$...
ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ, $a^n \pmod{b^n}$ ಸರಿಯೇ?

ಅಪ್ಪ : ನೀನು ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಳಿರುವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಭಾಗಾಹಾರ ? ಬೇರೆ ರೀತಿಯಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಹೇಗೆ ? ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸು.

a=b ಆದಾಗ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c.}$

c=d ಆಗಿದ್ದು, c ಮತ್ತು d ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗದಿದ್ದಾಗ

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \frac{1}{c} \times a = \frac{1}{d} \times b \left(\frac{1}{c}=\frac{1}{d}\right.$ ಆದಾಗ$\left.\right)$

ಅಪ್ಪ : ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಹುಷಾರಾಗಿರಬೇಕು. ಭಾಗಾಹಾರವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಲ್ಲ. ಮುಂದೆ ಎಂದಾದರೊಮ್ಮೆ ಇದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

9. ದಿನ ಮತ್ತು ದಿನಾಂಕ

ಸುಶೀಲ : ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ದಿನಾಂಕಕ್ಕೆ ಸರಿ ಹೊಂದುವ (ವಾರದ) ದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಈ 'ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳು' ನಮ್ಮ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವುದೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಅದು ತುಂಬಾ ಚೆನ್ನಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆ. ನಮಗೆ ಯಾವುದೇ ದಿನಾಂಕದ ದಿನ ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮುಂದಿನ ಅಥವಾ ಹಿಂದಿನ ದಿನವನ್ನು ನಾವು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ನೆಲೆಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 1988ರ ಮೇ ತಿಂಗಳ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3ನೇ ತಾರೀಖು ಯಾವ ದಿನ ?

ಸುಶೀಲ : ಮಂಗಳವಾರ.

ಅಪ್ಪ : 3ಕ್ಕೆ 7ನ್ನು ಸೇರಿಸು.

ರವಿ : 10.

ಅಪ್ಪ : 10ನೇ ತಾರೀಖು ಯಾವ ದಿನ ?

ಸುಶೀಲ : ಮಂಗಳವಾರ.

ಅಪ್ಪ : ಹಾಗಾದರೆ 7ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಸುಶೀಲ : ದಿನ ಬದಲಾಯಿಸದಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಅದೇ ಹೆಸರಿನ ದಿನ.

ಅಪ್ಪ : ಹಾಗಾದರೆ 6ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ರವಿ : ಹಿಂದಿನ ದಿನವನ್ನು ನೆಲೆಗೊಳಿಸುವುದು . ಅಂದರೆ 7ರ ಹಿಂದಿನ ದಿನದ ಹೆಸರು.

ಅಪ್ಪ : 8ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ರವಿ : ಮುಂದಿನ ದಿನವನ್ನು ನೆಲೆಗೊಳಿಸುವುದು. 7ರ ಮುಂದಿನ ದಿನದ ಹೆಸರು.

ಅಪ್ಪ : 1ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಸುಶೀಲ : ಮುಂದಿನ ದಿನ.

ಪ್ರಸಾದ್ : 8ನ್ನು ಕೂಡುವುದು ಮತ್ತು 1ನ್ನು ಕೂಡುವುದು ಮುಂದಿನ ದಿನವನ್ನು ನೆಲೆಗೊಳಿಸುವುದು. 8 ಮತ್ತು 1 R_1 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು .

ರವಿ : ನಾನೀಗ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡಿದ್ದೇನೆ. 1, 9, 17, 25ಗಳು 8ನ್ನು

ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ ಬರುವ ವಿನ್ಯಾಸ. 1 ಭಾನುವಾರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ 9 ಸೋಮವಾರ, 17 ಮಂಗಳವಾರ ಮತ್ತು 25 ಬುಧವಾರ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನೂ ಸಹ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡಿದ್ದೇನೆ.

6, 12, 18, 24, 30, 7ನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದ ಹಾಗೆ ಬರುವ ವಿನ್ಯಾಸವಿದು. 6 ಶುಕ್ರವಾರ, 12 ಗುರುವಾರ, 18 ಬುಧವಾರ, 24 ಮಂಗಳವಾರ, 30 ಸೋಮವಾರ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋದಾಗ ನಮಗೆ 6, 5, 4, 3, 2 ಸಿಗುತ್ತವೆ. ದಿನಗಳು ಏಕೆ ಹಿಂದೆ ಹೋಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಇದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಇದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ !

ಅಪ್ಪ : 9ನೇ ತಾರೀಖು ಯಾವ ದಿನ ?

ಸುಶೀಲ : ಸೋಮವಾರ.

ಅಪ್ಪ : 11 ದಿನವಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ವಾರ ?

ಸುಶೀಲ : 9 + 11= 20, 20 ಶುಕ್ರವಾರ.

ರವಿ : ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಗಮನವಿಡಿ 9 ಶೇಷ 2ರ ಸಂಖ್ಯೆ, 11 ಶೇಷ 4ರ ಸಂಖ್ಯೆ 9+11 ≡ 2+4=6 ಮತ್ತು 6ನೇ ದಿನ ಶುಕ್ರವಾರ.

ಪ್ರಸಾದ್ : 15ನೇ ತಾರೀಖು ಭಾನುವಾರ, ಇದು R_1ಸಂಖ್ಯೆ. 23 ದಿನಗಳ ನಂತರ ಯಾವ ದಿನ ಬರುತ್ತದೆ ?

ಸುಶೀಲ : 23 ಶೇಷ 2ರ ಸಂಖ್ಯೆ. 1 ಮತ್ತು 2ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 3, ಶೇಷ 3ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಂಗಳವಾರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

ರವಿ : ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನೋಡುವಂತೆ, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರನ್ನು ನೋಡಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. 15 + 23 = 38, 31 + 7 = 38.

7ನೇ ಜೂನ್ ಮಂಗಳವಾರ, ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಮೇ ತಿಂಗಳ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಿಂದ ವರ್ಷದ ಯಾವುದೇ ದಿನಾಂಕದ ದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಈ ವರ್ಷವೆಂದೇ ಅಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ವರ್ಷದ ಯಾವುದೇ ದಿನಾಂಕ. ಆದರೆ ಅದು 'ಗ್ರೆಗೋರಿಯನ್' ಆಗಿರಬೇಕಷ್ಟೆ. 'ಜೂಲಿಯನ್' ಮತ್ತು ಗ್ರೆಗೋರಿಯನ್ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ಗಳು ನೆನಪಿದೆಯೇ ?

ರವಿ : ಹೌದು ನೀವದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳಿದ್ದೀರಿ. ನನ್ನದೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಮೇ ತಿಂಗಳೇ ಏಕೆ ಅಪ್ಪ? ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಯಾವುದೇ ತಿಂಗಳ ದಿನಾಂಕದಿಂದ ವರ್ಷದ ಯಾವುದೇ ದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ನಾವು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಹಿನ್ನಡೆಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ನಾವು ಯಾವುದೇ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಬಹುದಾದಾಗ, ರವಿ ಹೇಳಿದ್ದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : 17ನೇ ಜೂನ್ ಶುಕ್ರವಾರ 11 ದಿನಗಳ ಹಿಂದಿನ ದಿನ ಯಾವುದಾಗಿತ್ತು ? 17 – 11 = 6. 6ನೇ ದಿನ ಸೋಮವಾರ ಆದರೆ ನಾವದನ್ನು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾಡಬೇಕು. 17ರ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆ 3. 11ರ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆ 4. 3–4 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

3 ಮತ್ತು 10 ಸರ್ವಸಮ. ಅದರ ಬದಲಾಗಿ ನಾವು 10 – 4ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಅದು 6. ಮತ್ತು 6ನೇ ದಿನ ಸೋಮವಾರ. ಹೌದು ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ರವಿ : ಮಾರ್ಚ್ 6ನೇ ದಿನ ಭಾನುವಾರ 40 ದಿನಗಳ ಹಿಂದೆ ಯಾವ ದಿನವಾಗಿತ್ತು ?

ಸುಶೀಲ : 40ರ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆ 5. 6 – 5 = 1.

ಅಪ್ಪ : 1ನೇ ಮಾರ್ಚ್, ಮಂಗಳವಾರ. ಆದುದರಿಂದ 6ನೇ ಮಾರ್ಚ್‌ನ 40 ದಿನಗಳ ಹಿಂದಿನ ದಿನ ಗುರುವಾರ. ಆದರೆ ತಿಂಗಳು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆ.

ಸುಶೀಲ : ಈ ಹಿನ್ನಡೆಯನ್ನು ನಾನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಮಂಗಳವಾರ

6	5	4	3	2	1	29	28	27	26	25
	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
	4	3	2	1	31	30	29	28	27	26

ಬುಧವಾರ ಗುರುವಾರ

ಇದು ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ. 01/01/1989 ಯಾವ ದಿನ ?

ರವಿ : 01/01/1988 ಶುಕ್ರವಾರ. 1988 ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಾಗಿರುವುದರಿಂದ 366 ದಿನಗಳ ನಂತರದ ದಿನ ಯಾವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಅಪ್ಪ : ಒಂದು ನಿಮಿಷ. $\frac{366}{7}$=52 ಅಂದರೆ R_2 366 7ರ ಶೇಷ 2 ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 1, ಶೇಷ 1ರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡನ್ನೂ ಕೂಡಿದಾಗ 2+1=3. 3ನೇ ದಿನ ಭಾನುವಾರ.

ರವಿ : ಒಂದು ನಿಮಿಷ. ನಾನು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

31/12/88 ಶನಿವಾರ, ಆದುದರಿಂದ 1/1/89 ಭಾನುವಾರ ಸರಿ.

ಸುಶೀಲ : 01/01/1987 ದಿನ ಯಾವುದು?

ರವಿ : 1/1/88 ಶುಕ್ರವಾರ, 1987 ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ 1/1/88ರಿಂದ 365 ದಿನ ಹಿಂದಿನ ದಿನ ಯಾವುದು ಎಂಬುದು ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಸುಶೀಲ : $\frac{365}{7}$=52, $R_1$365 ಶೇಷ 1ರ ಸಂಖ್ಯೆ

1 – 1 = 0. ಅಥವಾ 7 ಅದು ಗುರುವಾರ.

ರವಿ : ಇಲ್ಲಿನ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲಿರುವ 1987ರ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಹೌದು, 1/1/87 ಗುರುವಾರ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಈ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅದ್ಭುತ ಪಾತ್ರಗಳಿಂದ ನಾವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ಒಂದು ಪೋಸ್ಟ್ ಕಾರ್ಡ್ ಅಳತೆಯ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಗ್ಗೂಡಿಸಿದ್ದೇವೆ .

ರವಿ : ನಿಜವಾಗಿಯೂ, ಅದು ತುಂಬಾ ರೋಚಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂಥದ್ದೊಂದು ಮಾಡಲು ನಮಗೂ ಸುಳಿವು ನೀಡಿ.

ಅಪ್ಪ : ಅದು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಸುಶೀಲ : 1 ರಿಂದ 31 ದಿನಗಳು ಎಂದರ್ಥವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿನ ದಿನಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವಿರಾ ?

ಜ	ಫೆ	ಮಾ	ಏ	ಮೇ	ಜೂ	ಜು	ಆ	ಸೆ	ಅಕ್ಟೋ	ನವೆಂ	ಡಿಸೆಂ
31	28/29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

ಅಪ್ಪ: ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲ ದಿನವನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಒಂದು ದಿನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕು.

ರವಿ : ಸರಿ, ನಾನು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದಿನಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.

ಸುಶೀಲ: ಜನವರಿ 1988ರ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು, ಉಳಿದ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ನನಗೆ ಕೊಡು. ನಿನ್ನ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

ರವಿ : ಜನವರಿ 1, ಶುಕ್ರವಾರ

ಫೆಬ್ರವರಿ 01, 31 ದಿನಗಳ ನಂತರ ಬರುವುದು. 31 R_3ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1 + 3 = 4. 4ನೇ ದಿನ ಸೋಮವಾರ. ಅಂದರೆ ಫೆಬ್ರವರಿ 1 ಸೋಮವಾರ.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿ.

ರವಿ : ಮಾರ್ಚ್ 1, 29 ದಿನಗಳ ನಂತರ, 29 : R_1 4 + 1 = 5, 5: ಮಂಗಳವಾರ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರ್ಚ್ 1 ಮಂಗಳವಾರ.

ರವಿ : ಏಪ್ರಿಲ್ 1, 31 ದಿನಗಳ ನಂತರ .31 : R_3 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 5+3=8. 8 ಎಂಬುದು 1ಕ್ಕೆ ಸಮ ಮತ್ತು 1 ಶುಕ್ರವಾರ. ಹಾಗಾಗಿ ಏಪ್ರಿಲ್ 1 ಶುಕ್ರವಾರ.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿ.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿ.

ರವಿ : ಉಳಿದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಹೇಳುವೆ.

ಮೇ 1 – ಭಾನುವಾರ
ಜೂನ್ 1 – ಬುಧವಾರ
ಜುಲೈ 1 – ಶುಕ್ರವಾರ
ಆಗಸ್ಟ್ 1 – ಸೋಮವಾರ
ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 – ಗುರುವಾರ
ಅಕ್ಟೋಬರ್ 1 – ಶನಿವಾರ
ನವೆಂಬರ್ 1 – ಮಂಗಳವಾರ
ಡಿಸೆಂಬರ್ 1 – ಗುರುವಾರ.

ಸುಶೀಲ : ಎಲ್ಲವೂ ಸರಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಈಗ ಜನವರಿ, ಏಪ್ರಿಲ್, ಜುಲೈ ತಿಂಗಳುಗಳ 1ನೇ ತಾರೀಖು – ಶುಕ್ರವಾರ, ಹಾಗೆಯೇ ಅಕ್ಟೋಬರ್ – ಶನಿವಾರ, ಮೇ –ಭಾನುವಾರ, ಫೆಬ್ರವರಿ, ಆಗಸ್ಟ್ – ಸೋಮವಾರ, ಮಾರ್ಚ್, ನವೆಂಬರ್– ಮಂಗಳವಾರ, ಜೂನ್ – ಬುಧವಾರ, ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್, ಡಿಸೆಂಬರ್ – ಗುರುವಾರಗಳಂದು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಅದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

1,	4	7	ಶುಕ್ರವಾರ
	10		ಶನಿವಾರ
	5		ಭಾನುವಾರ
	2	8	ಸೋಮವಾರ
	3	11	ಮಂಗಳವಾರ
	6		ಬುಧವಾರ
	9	12	ಗುರುವಾರ

ಕೇವಲ ಜನವರಿಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ದಿನಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯ ಮಾಡಿದಂತೆ ಜನವರಿಯ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ಅನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು 1988ರ ಉಳಿದ ತಿಂಗಳುಗಳ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ಸಂಕುಚಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು:–

	ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
	31					1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30
ತಿಂಗಳು							
1, 4, 7	3	4	5	6	7	1	2
10	4	5	6	7	1	2	3
5	5	6	7	1	2	3	4
2, 8	6	7	1	2	3	4	5
3, 11	7	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6	7
9, 12	2	3	4	5	6	7	1

ಸುಶೀಲ : 21/9/1988ನ್ನು ನಾನು ಆರಿಸುವೆ. ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ಈ ದಿನಾಂಕದ ದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೇಗೆ ಬಳಸುವುದು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : 9ನೇ ತಿಂಗಳಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 21 ದಿನಾಂಕದ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯೆ : 6. 6ನೆಯ ದಿನ ಬುಧವಾರ.

ರವಿ : ದಿನಾಂಕವನ್ನು ಕೊಡು. ನಾನು ದಿನವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇನೆ.

ಸುಶೀಲ : 24–11–1988

ರವಿ : 11ನೇ ತಿಂಗಳಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 24 ದಿನಾಂಕದ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯೆ : 7. 7ನೆಯ ದಿನ ಗುರುವಾರ.

ಸುಶೀಲ : ಸರಿ

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾವು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ಅನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸರಳಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ? ನಾವು ಮೊದಲು ಜನವರಿ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ತಿಂಗಳುಗಳ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಬೇಕೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

1	4	7	ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ 0	ಅಥವಾ	+7
	10		"		+1
	5		"		+2
	2	8	"		+3
	3	11	"		+4
		6	"		+5
	9	12	"		+6

ರವಿ : ಆದರೇನು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಿಂದೆ ತಿಳಿಸಿದ ಹಾಗೆಯೇ ಜನವರಿ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜನವರಿ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವಂತೆ ತಿಂಗಳುಗಳ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜನವರಿ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಜನವರಿ 1988

ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
31				0	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
2	3	6	9	1	10	5
8	11		12	4		
				7		

ರವಿ : ಅದನ್ನು ನನಗೆ ಕೊಡು. ದಿನಾಂಕವನ್ನು ಹೇಳು. ನಾನು ದಿನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಒಳ್ಳೆಯದು. 12/3/1988

ರವಿ : $12 \equiv 5$, $3 \rightarrow 4$ ಮತ್ತು $5 + 4 = 9 \equiv 2$, 2 ಶನಿವಾರ, ಆದ್ದರಿಂದ 12/3/1988 ಶನಿವಾರ ಸರಿಯೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಿನಗದು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಸುಶೀಲ : ಬನ್ನಿ, ನನ್ನ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇನೆ.

ರವಿ : 19/8/1988 ಯಾವ ದಿನ ?

ಸುಶೀಲ : $19 \equiv 5$, $8 \rightarrow 3$. $5 + 3 = 8$ $8 \equiv 1$, 1ಶುಕ್ರವಾರ. ಹಾಗಾದರೆ 19/8/1988 ಶುಕ್ರವಾರ

ಪ್ರಸಾದ್ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ಅನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಂಕುಚಿತಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೆಂದು ನನಗನಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ದಿನಾಂಕಗಳನ್ನು ಏಕೆ ತೋರಿಸಬೇಕು ? ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವುದು ದಿನಾಂಕದ ಶೇಷ ಮತ್ತು ನಾವದನ್ನು 7ರಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಿ (ಕಳೆದು) ದಿನಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ರವಿ : ನನಗೆ ನಿನ್ನ ವಿಚಾರ ತಿಳಿಯಿತು. ನಾನದನ್ನು ನಿನಗಾಗಿ ಮಾಡಬಲ್ಲೆ. ಒಂದು ಬುಕ್ ಮಾರ್ಕ್ ಮೇಲೆಯೇ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಜನವರಿ 1988

ಭಾನು	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
3	4	5	6	7 ಅಥವಾ0	1	2
2	3	6	9	1	10	5
				4		
8	11		12	7		

ಸುಶೀಲ : ಅರೆ ! ಇದು ಅದ್ಭುತ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ನಮ್ಮ ಅಪ್ಪ ಇಂತಹ ಸಂಕುಚಿತ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನ್ನು ಮುದ್ರಿಸುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ನಾವದನ್ನು ನಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆಲ್ಲ ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

10. ಗಣಿತ ಸಂರಚನೆಗಳು

ಅಪ್ಪ : ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣವನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ, ಅಂತರ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವಲ್ಲಿ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 – ಈ ಶೇಷಗಳು ದಿನಗಳನ್ನು ನಿಗದಿಗೊಳಿಸುವಾಗ ಹಾಗೂ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ, ಅವುಗಳ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ. ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ನಾವು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ. ನಾವು ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ರವಿ : ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನಾನು ಮಾಡಲೇ ?

ಸುಶೀಲ : ನಿನಗೆ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಬೇಕೇ ?

ರವಿ : ನನಗೇನು ಬೇಡ. ಸಂಕಲನ ಕೋಷ್ಟಕ ಇಲ್ಲಿದೆ.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

ಸುಶೀಲ : ಕೋಷ್ಟಕವು ಸಂಕಲನದ ವಿಶೇಷ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

+	5
	↓
3	→ 1

ರವಿ : 3 ಮತ್ತು 5ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಮೊತ್ತ 1 ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ನೀವು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಮೊತ್ತ 1 ಸರಿ.

ಸುಶೀಲ : ಅರೆ ! ಹೌದು, ಶೇಷ 3 ಸಂಖ್ಯೆ + ಶೇಷ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಶೇಷ 1 ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ರವಿ : ನೀನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೀಡಬಲ್ಲೆಯಾ ?

ಸುಶೀಲ : ಶೇಷ 3 ಮತ್ತು ಶೇಷ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು 7ರ ಗುಣಕಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾನು ಕೂಡಬೇಕು.

$14 + 3 = 17$; $21 + 5 = 26$

$17 + 26 = 43$ ಮತ್ತು $\frac{43}{7} = 6$ ಶೇಷ 1 ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : '0'ಯೂ ಸಹ 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲವೇ ? ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ "0"ಗೆ 3 ಮತ್ತು 5ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ 3 ಮತ್ತು 5ನ್ನು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ 8 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಸಹ ಶೇಷ 1ರ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನೀಗ ಗಮನಿಸಿದೆ. ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಅಪ್ಪ : ಇದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿಷಯವಿದೆ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣದಲ್ಲಿ 3ನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಮಾಡಲು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

ರವಿ : ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ(ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, natural numbers) ಗಣದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ : ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ (integers) ಗಣದಲ್ಲಿ ?

ರವಿ : ನನಗೆ ಗೊತ್ತು, ಅದು –3.

ಅಪ್ಪ : ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಗಣದಲ್ಲಿ ?

ರವಿ : 3ಕ್ಕೆ ಏನನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 0 ? 4 ಎಂದು ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುವುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮಗಳು (additive inverses) ಅದೇ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಇದು ಅದ್ಭುತವಲ್ಲವೇ ? '0'ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೃಜಿಸಲಾಗಿದ್ದು. ಆದರೆ ಮಾಡ್ಯುಲೋ (2ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ) ಶೇಷ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಅದೇ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಿಂದಲೇ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ, ಅದರ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ.

ರವಿ : ನಾನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.

ಶೇಷ	0	1	2	3	4	5	6
ವಿರುದ್ಧ	0	6	5	4	3	2	1

'0'ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರಕಗಳೇ.

ಅಪ್ಪ : 0ಯಿಂದ 6ರ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ರವಿ : 7ರ ಪೂರಕ ಜೊತೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

$1^2=1 \pmod 7$
$6^2=1 \pmod 7$

$2^2=4 \pmod 7$
$5^2=4 \pmod 7$

$3^2=2 \pmod 7$
$4^2=2 \pmod 7$

ಅರೆ ! ಇದು ಅದ್ಭುತ. ಅವು ಜೊತೆ ಜೊತೆಯಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದರೆ ಕೇವಲ 1, 2 ಮತ್ತು 4 ಮಾತ್ರ ಶೇಷಗಳಾಗಿ ಬಂದಿವೆ.

ಅಪ್ಪ : 1, 2, 4ನ್ನು ವರ್ಗೀಯ ಶೇಷಗಳೆನ್ನುವರು.

3, 5, 6ನ್ನು ವರ್ಗೀಯ ಅ–ಶೇಷಗಳೆನ್ನುವರು. ಗೌಸ್ ಇದರಿಂದ ಚಕಿತನಾದನು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಪ್ರತಿ ಮಾಡ್ಯುಲೋವಿಗೂ ಕೆಲವು ವರ್ಗೀಯ ಶೇಷಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ವರ್ಗೀಯ ಅಶೇಷಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು. ಅವು ಹಾಗೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಣದಲ್ಲಿನ ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ನಾವೀಗ ಹೋಲಿಸೋಣ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಣದಲ್ಲಿ 2–5 ಏನಾಗುತ್ತದೆ ?

ರವಿ : ಅದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವಿಲ್ಲ. ಕೇವಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ 2–5 = –3.

ಅಪ್ಪ : ಈಗ, (ಮಾಡ್ಯುಲ್ 7) ಶೇಷಗಣದಲ್ಲಿ 2–5 ರ ಬೆಲೆ ಏನು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : 5ಕ್ಕೇ ಏನನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 2 ಬರುವುದು ಕೋಷ್ಟಕವು 4 ಎಂದು ತೋರುವುದು.

$$\begin{array}{c|c} + & 5 \\ \hline & \downarrow \\ 4 & \rightarrow\ 2 \end{array}$$

ಹಾಗಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಬಹುದು; ಮತ್ತೆ ಶೇಷಗಣದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉತ್ತರವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಪ್ಪ: ಈ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರ ಸಂಗತಿ ಇದೆ. 2, 4, 6ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ 6–4=2, 4–2=2 ಮತ್ತು 6>4>2 ನಾವೀಗ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಸಂಕಲನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ 2, 4 ಮತ್ತು 6ರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹುಡುಕೋಣ.

ರವಿ : 6–4 = 2, 6–2=4

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ, 4 – 6 =5 ಮತ್ತು 2–6=3 ಇವೂ ಸಹ ಇವೆ. ಅರೆ ! ಇದು ಗೊಂದಲತರುತ್ತಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ 6>4, ಮತ್ತು 4>6, 6>2 ಮತ್ತು 2>6 ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಅಸಂಬದ್ಧ.

ಅಪ್ಪ: ನಾವು ಈ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ/ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಈ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 'ಕ್ರಮಗುಣ' (order property) ಇಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ನಾವೀಗ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ರವಿ : ನಾನೀಗ ಗುಣಾಕಾರ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಅಪ್ಪ : ನಿನಗೀಗ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯೇ ?

ರವಿ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಇಲ್ಲದೆಯೇ ನಾನದನ್ನು ಮಾಡಬಲ್ಲೆ. ಆದರೆ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಮಾಡಲು ನನಗದು ಬೇಕಿದೆ.

X	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಾಗಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಶೇಷ 6 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಶೇಷ 4 ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 3 ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರಬೇಕು.

ಶೇಷ 6ರ ಸಂಖ್ಯೆ 13

ಶೇಷ 4ರ ಸಂಖ್ಯೆ 11

ಗುಣಿಸಿದಾಗ, $13 \times 11 = 143$

$$\frac{143}{7} = 20 \quad R3$$

ಹೌದು 143 ಶೇಷ 3ರ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅಪ್ಪ: ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ 5ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ $3\times\square=5$, ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7 ಶೇಷಗಣದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವಿದೆ. ಏನದು ?

ರವಿ : ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ 3 × 4 = 5 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು 4 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಅದೇನೆಂದು ನನಗರ್ಥವಾಯಿತು. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಪರಿಚಯವಾಗಲೀ ಹಾಗೂ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸರಳರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿರುವ ಛೇದ 1 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಹಾರ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅಪ್ಪ: ಪೂರ್ಣಾಂಶವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಅಕರಣೀಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (rational numbers) ನಿನಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವುದಲ್ಲ ! ಪ್ರಥಮ ಅಕರಣೀಗತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಕಡೆಯ ಅಕರಣೀಗತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ ಇಲ್ಲ. ಈ ಗಣವು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಆಶ್ಚರ್ಯಕರ ಸಂಗತಿ ಎಂದರೆ ಪರಿಮಿತಗಣವಾದ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಣವೂ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಸಹ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣದಂತೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಯಾವ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆಂದರೆ ನೀವು ಅದರಲ್ಲಿ.....

ರವಿ : ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಶೇಷವಿರದ ಭಾಗಾಹಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅದ್ಭುತ. ನಾಲ್ಕೂ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಈ ಗಣಕ್ಕೆ ಹೆಸರೇನು ?

ಅಪ್ಪ: ಅಂತಹ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವ ಅಂಥ ವಿಧಾನವೊಂದಿದೆ, ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಇದನ್ನು field ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅಪ್ಪ, ನನ್ನದೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ. ಮಾಡ್ಯುಲೋವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಏನಾಗುವುದು? ನಾವು ಚಿಕ್ಕ ಗಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣವೂ ಇರಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಮಾಡ್ಯುಲೋ 2ಕ್ಕೆ 0 ಮತ್ತು 1 ಇರುವುದು.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು 6 ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಏನಾಗುವುದು?

ಅಪ್ಪ : ಬರೆದು ನೋಡು. 0ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸು.

ಸುಶೀಲ : ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ತಲೆಬರಹವು 0ಯಿಂದ 5 ಆಗಿರುವುದು. ಸರಿ, ಅದು ಇಲ್ಲಿದೆ.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

ಮತ್ತು ಮುಂದುವರೆಯುವುದು.

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು. ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

ಸುಶೀಲ : 0, 1, 2, 3, 4, 5

ಅಪ್ಪ : ನೋಡಿ ಏನಾಯಿತು ! ನಾನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೀಯಾ ?

ರವಿ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡಿ.

ಅಪ್ಪ : 113

ರವಿ : $\frac{113}{6} = 18\ R5$

ಪ್ರಸಾದ್ : $113 \equiv 5$(ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6)

ಸುಶೀಲ : 5ರ ತಲೆಬರಹದಲ್ಲಿನ ಕಡೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 113 ಇರುವುದು.

ಅಪ್ಪ: ಹಾಗಾದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ, ಸರಿಯೇ ?

ರವಿ : ಹೌದು.

ಅಪ್ಪ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಬಹುದೇ ?

ಸುಶೀಲ : ಇಲ್ಲ

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 6 ಶೇಷ ಗಣಗಳಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ : ಗಣಿತಜ್ಞನ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು partitioning ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಉಪಗಣಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ನನಗದು ಅರ್ಥವಾಯಿತು.

ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಕ್ಷಣ ಕೆಲವು ಅದ್ಭುತ ವಿಷಯಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

1. ಮಾಡ್ಯುಲೋ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
2. ಮಾಡ್ಯುಲೋಗಾಗಿ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಮಿತಗಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.
3. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ವಿಭಾಗವಾಗಿ ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ರವಿ : ಏಕೆ ? ನಾವು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಮೊತ್ತದಾಟ, ಅಂತರದಾಟ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ದಾಟವನ್ನು ಆಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ: ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಶೇಷಗಣದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ, ನೀವು ಇಷ್ಟಪಟ್ಟರೆ 7ರ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಹಾರಗಳನ್ನು ಶೇಷವಿಲ್ಲದೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದಾದರೆ, ಒಂದು field ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7, ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಣಗಳೇ ಆಗಿವೆ. ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲೋಗೆ ಇದು ಹೀಗೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6 ಶೇಷಗಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೋ.

ರವಿ : ಶೇಷಗಳು 0, 1, 2, 3, 4, 5. ನಾವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು ಅಲ್ಲವೇ ?

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6ರ ಸಂಕಲನ ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

ರವಿ : ಇದು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಸಂಕಲನ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆಯೇ ಇದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯೂ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸುಶೀಲ : ನಾನೀಗ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6ಕ್ಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸುವೆ

X	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

ರವಿ : ಓ ದೇವರೇ ! ಇದು 7ರ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ: ನೀನು ಸರಿಯಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀಯಾ. ಕೆಲವು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನೀನು ಗುರುತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : 3× 2 = 0 3 × 4 = 0 ಇಂತಹ ಗುಣಕಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಗುಣಕಗಳು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ : ಅಕರಣೀಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ ಇಲ್ಲ. ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಯಾವ ಗಣದಲ್ಲಿಯೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಭಾಜಕಗಳಿಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ: ಅದು ಸರಿ. ಈ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೋ 3×□=4 ಬಿಡಿಸುವೆಯಾ ?

ರವಿ : ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತರಗಳಿವೆ. 2 × 2 = 4, 2 × 5 = 4 ಆದ್ದರಿಂದ 2, ಮತ್ತು 5 ಚೌಕಟ್ಟಿನ ಒಳಗೆ ಹೋಗುತ್ತವೆ.

ಅಪ್ಪ : ನೀನು ¾ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆಯಾ ? ಎಂದರೆ, 4× □=3 ಇದನ್ನು ನೀನು ಬಿಡಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವಿಲ್ಲ 4 × 0 = 0, 4 × 1 = 4, 4 × 2 = 2, 4×3 = 0, 4 × 4 = 4, 4 × 5 = 2, ನಾವು ಉತ್ತರವಾಗಿ 3ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದೇ ಇಲ್ಲ.

ರವಿ : ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6 ಶೇಷಗಳು ಗಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಹಾರ ಯಾವಾಗಲೂ ಮಾಡುವಂತಿಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ : ನೀನು ಜಾಣ ಇದ್ದೀಯಾ. ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6ರ ಶೇಷಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ನೀನು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಭಾಗಾಹಾರ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದುದರಿಂದ ಇದು field ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು, ನೀನು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿದೆ. ಇದು 'ರಿಂಗ್'.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯಿರುವುದು ಯಾವುದೋ ಮಾಡ್ಯುಲೋದ ಶೇಷ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣವು field ಆಗುವುದೋ ಅಥವಾ ring ಆಗುವುದೋ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಅಪ್ಪ : ಅದು ಒಳ್ಳೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಸುಶೀಲ : ಏಕೆ ? ನಾವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ ?

ರವಿ : ಗುಣಾಕಾರದ ಕೋಷ್ಟಕವೇ ಸಾಕು ಎಂದು ನನಗನಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅದೇನೋ ಸರಿ ಆದರೆ ಅದು ಮತ್ತಷ್ಟು ಜಟಿಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ರವಿ : ನನ್ನ ಬಳಿ ಉತ್ತರವಿದೆ. ಬೆಸ ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಇದ್ದಾಗ field, ಅದು ಸಮ ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಇದ್ದಾಗ ring ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಅದಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ, ಮಾಡ್ಯುಲೋ 4, 5, 9 ಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಎರಡೂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳೇಕೆ ಬೇಕು ? ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕವೊಂದೇ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಅಪ್ಪ : ಸರಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿ.

ರವಿ : ನಾನು ಮೊದಲು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 9ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

X_9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	5	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

ಸುಶೀಲ : ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಾನು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 4, 5ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

X_4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

X_5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ರವಿ : ಮಾಡ್ಯುಲೋ 9ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟವು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 6ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆಯೇ ನಾನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದೆ. ಊಹೆ ಸರಿಯಾಗಲಿಲ್ಲ.

ಸುಶೀಲ : ಆದರೆ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕವು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕದಂತಿದೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 4, 6, 9ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಒಂದೇ ವಿನ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5 ಮತ್ತು 7ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅರೆ ! ನಾನು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದೆ. 4, 6, 9ಗಳು 2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. 5 ಮತ್ತು 7 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಶೇಷಗಣವು field ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾಡ್ಯುಲೋದ ಶೇಷಗಣವು ring ಆಗಿದೆ.

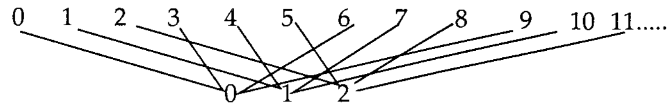
ಅಪ್ಪ : ಅದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಶೋಧನೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾದ ವಿಷಯವಿದೆ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು ಮಾಡ್ಯುಲೋ 3ರ ಶೇಷಗಣವನ್ನು ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರಿ.

ರವಿ : ಇಲ್ಲಿದೆ.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.....
				0	1	2				

ಅಪ್ಪ : "ಒಂದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸುವ" ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಅವುಗಳೆರಡನ್ನೂ ಹೊಂದಿಸಿ.

ಸುಶೀಲ : ನಾನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ.



ಅರೆ ! ಸುಂದರವಾಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು "ಡೋಮೈನ್" ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೋಡೋಮೈನ್ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಸೇರಿಸುವ ಬಾಣಗಳು 'Map' ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

0, 3, 6, 9 .... 0 ಗೆ ಮ್ಯಾಪ್ ಆಗಿದೆ.

1, 4, 7, 10 .... 1 ಕ್ಕೆ ಮ್ಯಾಪ್ ಆಗಿದೆ.

2, 5, 8, 11 .... 2 ಕ್ಕೆ ಮ್ಯಾಪ್ ಆಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಇದೆಂತಹ ಮ್ಯಾಪಿಂಗ್ ?

ರವಿ : ಪ್ರತಿ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಿದೆ (ಮ್ಯಾಪ್), ಎಲ್ಲಾ ಶೇಷಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬಳಕೆಯಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು 'ಹಲವಾರು – ಒಂದು' (many to one map) ಆಗಿದೆ. ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಬಂಧವಲ್ಲ, ಇದು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧ. ಕಳೆದ ವರ್ಷ ನಮಗೆ ನೀವು ಪರಿಚಯಿಸಿದರಲ್ಲ ಅದು. ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಒಳ್ಳೆಯದು 0, 1, 2ಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ 5 ಮತ್ತು 10ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳಾವುವು ?

ರವಿ : ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು 2 ಮತ್ತು 1

ಅಪ್ಪ : (5+10) ಅಥವಾ 15ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಏನು ?

ರವಿ : 0

ಸುಶೀಲ : 2+1 ಎನ್ನುವುದು '0' ಗೆ ಸಮ

ಪ್ರಸಾದ್ : 2 ಮತ್ತು 1 ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆ ಆದುದರಿಂದ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ರವಿ : ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೂ ಹೀಗೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆಯೇ ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. 5 ಮತ್ತು 10ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು 2 ಮತ್ತು 1, $5 \times 10 = 50$, 50ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ 2,

ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $2 \times 1 = 2$, ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರೆಯುವುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಅಪ್ಪ : ಇದು ಗಣಿತದ ಸಂರಚನೆಗಳಲ್ಲಿ " Homomorphism" ಗುಣ. ಅದಿರಲಿ, ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಒಂದು ಸುಂದರವಾದ ವಿಭಾಜಕ (divisibility) ಗುಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಯಾವ ಗುಣ ?

ಅಪ್ಪ : ಈ ಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5ರ ಗುಣಕ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು '0'ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪರಿಗಣಿಸು.

ಸುಶೀಲ : ಇಲ್ಲಿ,

X_5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

ಅರೆ, ನಮಗೆ 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಚೌಕವು ಸಿಕ್ಕಿತು !

ಅಪ್ಪ : ಈಗ $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 1$, $3 \times 3 = 4$, ಮತ್ತು $3 \times 4 = 2$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5ರಲ್ಲಿ. ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

ರವಿ : $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 4 = 3 \times 1 \times 4 \times 2$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಇದನ್ನು $3^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಪ್ಪ : ಅದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಅರೆ ! ಇದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಸಂಖ್ಯೆ. ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನೂ $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ಮತ್ತು $3^4 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5)ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಅಪ್ಪ : ಹಾಗಾದರೆ $3^4 \equiv 1$ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ?

ರವಿ : $3^4 - 1 \equiv 0$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5)

ಅಪ್ಪ : ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು ?

ಪ್ರಸಾದ್ : $3^4 - 1$, 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

ಅಪ್ಪ : ನಾವು ಇತರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ನಮಗೇನು ಸಿಗುವುದು ?

$1^4 - 1$, 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$2^4 - 1$, 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$4^4 - 1$, 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

ಅಪ್ಪ : ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7ರ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅದೇ ರೀತಿಯ ವಿವರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : $1^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$2^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$3^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$4^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$5^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

$6^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು

ಆದರೆ $7^6 - 1$, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. $8^6 - 1$, 7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಸರ್ವಸಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ನೋಡುತ್ತೇನೆ. ನಾನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿರುವುದು

$8^6 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಅಲ್ಲವೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಮುಂದುವರೆ.

ಪ್ರಸಾದ್ : $8 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7)

ಆದ್ದರಿಂದ, $8^6 \equiv 1^6$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7), ಹಾಗಾಗಿ $8^6 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಸರಿಯೇ ?

ಅಪ್ಪ : $9^6 - 1$ ಹೇಗೆ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ನಾನು $9^6 - 1 \equiv 0$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ ?

ಸರಿ $9 \equiv 2$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7)

$9^6 \equiv 2^6$, ಈಗ $2^6 - 1$, 7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದರಿಂದ $9^6 - 1$ ಸಹ 7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು.

ಅಪ್ಪ : ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಯಾವ ಮಹತ್ತರ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲಿದ್ದೇವೆ ?

ಪ್ರಸಾದ್ : ಯಾವುದಾದರೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಆರಿಸಿ, p ಗುಣಕವಾಗಿರದ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆರಿಸಿ, ಆಗ $n^{p-1}-1$, pಯಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು. ಎಂತಹ ಉತ್ತಮವಾದ ಸಂಶೋಧನೆ! ಎಂತಹ ಆಳವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ! ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದವರಾರು?

ಅಪ್ಪ : ಫರ್ಮಾ(Fermat) , 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞ. ನಾನು ಈ ಹದಿನೈದು ದಿವಸಗಳು ಹೊರಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದಿನಾಂಕಕ್ಕೆ ದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಗ್ರೆಗೋರಿಯನ್ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲೇ ?

ಅಪ್ಪ : ಹೌದು. ನಾವೀಗ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಕೇವಲ ಅದೇ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್.

ರವಿ : ನೀವು ಬರುವದರೊಳಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನೂ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅಪ್ಪ ನನ್ನದೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ.

ಸುಶೀಲ : ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ಅಂಕಗಣಿತಗಳಿವೆ ಅಪ್ಪ ?

ಅಪ್ಪ : ನಾವೆಲ್ಲರೂ ಕಂಡಂತೆ ನಾವು ಒಂದೇ ' ಅಂಕಗಣಿತ' ಎನ್ನುವಂತಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ನಾವು 'ಅಂಕಗಣಿತಗಳು' ಎನ್ನಬೇಕು. ನಿಮಗೆಷ್ಟು ಬೇಕೋ ಅಷ್ಟು ಅಂಕಗಣಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಬಹುದು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಆದರೆ ಅವು ಕೇವಲ ಎರಡು ಸಂರಚನೆಗಳನ್ನು (ring ಮತ್ತು field) ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಅಪ್ಪ : ನೀನು ಸರಿ.

ಸುಶೀಲ : ಧನ್ಯವಾದಗಳು ಅಪ್ಪ.

ರವಿ : ನಾವು ಈ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನೊಂದಿಗೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಉತ್ತಮ ಸಮಯವನ್ನು ಕಳೆದೆವು.

ಪ್ರಸಾದ್ : ಓ ದೇವರೇ! ಒಂದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಿಂದ ಇಷ್ಟೊಂದು! ನಾವು ನಿಮಗೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಆಭಾರಿಗಳು ಅಪ್ಪ.

ಪಿ. ಕೆ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್ : ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ

ಈ ಕೃತಿಯೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಒಟ್ಟು ನವಕರ್ನಾಟಕ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳು : **1459**

ಮರುಮುದ್ರಣಗಳು ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು : **3686**

ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳು

ಮಕ್ಕಳ ಪುಸ್ತಕಗಳು	… 152
ಚಿತ್ರಕಲೆ, ರಂಗಭೂಮಿ, ಕಲಾಕೋಶ	13
ವಿಜ್ಞಾನಕೋಶ, ಮಾಹಿತಿಕೋಶಗಳು, ಸ್ಪರ್ಧಾ ಕೈಪಿಡಿಗಳು	… 13
ಲೋಕಜ್ಞಾನ ಮಾಲೆ	… 9
ಇಂದ್ರಜಾಲ	… 3
ಗಣಿತ	… 5
ಗಣಿತ ಸಂವತ್ಸರ ಮಾಲೆ	… 3
ನವಕರ್ನಾಟಕ ಜ್ಞಾನ-ವಿಜ್ಞಾನ ಮಾಲೆ	7
ವಿಜ್ಞಾನ – ಸರಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಲೆ	… 20
ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ, ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ	… 87
ಪರಿಸರ ವಿಜ್ಞಾನ, ಅರಣ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರ, ವನ್ಯಜೀವಿ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	… 16
ಕೃಷಿ , ಹೈನುಗಾರಿಕೆ	… 16
ಅಡುಗೆ	… 4
ಆರೋಗ್ಯ, ವೈದ್ಯಕೀಯ, ಮನೋವಿಜ್ಞಾನ	… 131
ಯೋಗ, ವ್ಯಾಯಾಮ, ಕ್ರೀಡೆ	… 5
ವ್ಯಕ್ತಿ ವಿಕಸನ ಮಾಲೆ	… 37
ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಾಸ, ಸ್ವ-ಸಹಾಯ	… 4
ಶಿಕ್ಷಣ	… 24
ಕನ್ನಡ ಕಲಿಕೆ, ವ್ಯಾಕರಣ, ಭಾಷಾಶಾಸ್ತ್ರ	8
ಪದಕೋಶಗಳು, ಅರ್ಥಕೋಶಗಳು	12
ಕಾನೂನು, ಅಪರಾಧ ನಿಯಂತ್ರಣ, ಗ್ರಾಹಕ ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಸಂವಿಧಾನ	… 21
ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರ, ಮತಧರ್ಮ	… 23
ವಿಚಾರ ಸಾಹಿತ್ಯ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಧರ್ಮ	… 45
ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರ	… 22
ಆರ್ಥಿಕ, ಸಾಮಾಜಿಕ, ರಾಜಕೀಯ	… 69
ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯೋತ್ತರ ಭಾರತ ಅವಲೋಕನ	12
ಇತಿಹಾಸ	… 43

ಕ್ರಾಂತಿ ಕಿಡಿಗಳು ಮಾಲೆ	… 20
ಹೊಸತು ವಾಚಿಕೆ ಮಾಲೆ	… 18
ಜೀವನ ಚರಿತ್ರೆ, ವ್ಯಕ್ತಿ ಚಿತ್ರಣ	… 40
ಸಾಹಿತ್ಯ ಚರಿತ್ರೆ, ವಿಮರ್ಶೆ, ಸಂಕೀರ್ಣ	16
ನವಕರ್ನಾಟಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ಸಂಪದ ಮಾಲೆ	52
ಪ್ರವಾಸ ಕಥನ, ಅನುಭವ, ಪ್ರಬಂಧ	24
ಆತ್ಮಕಥನ	… 8
ವನಿತಾ ಚಿಂತನ ಮಾಲೆ	… 20
ವಿಶ್ವಕಥಾಕೋಶ ಮಾಲೆ	… 25
ಕಾದಂಬರಿ, ಕಥೆ, ಕವನ, ನಾಟಕ	… 95
ಹಾಸ್ಯಸಾಹಿತ್ಯ	… 21
ಅಕ್ಷರ ಕಿರಣ ಮಾಲೆ	… 135
ನವಕರ್ನಾಟಕ ಚಿತ್ರ ಖಜಾನೆ	… 19
Children's Literature	… 28
English Grammar & Language	22
Popular Science & Technology	6
Magic	… 2
Health & Medical Science	… 15
Law, Crime Prevention & Consumer Protection	… 11
History, Economics & Socio-Political	… 8
Rational Literature	… 6
Philosophy	… 9
Biographies, Memoirs & Essays	4
Fiction	… 2
Navakarnataka Picture Treasure	19
ಹಿಂದಿ ಪುಸ್ತಕಗಳು	… 5
ಇತರೆ	… 25
ಒಟ್ಟು ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳು	**…1459**
ಮರುಮುದ್ರಣಗಳು (ಕನ್ನಡ)	…2062
ಮರುಮುದ್ರಣಗಳು (ಇಂಗ್ಲಿಷ್)	… 165
ಒಟ್ಟು ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು	**…3686**

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

ಗಣಿತ

ಅಂಕಗಣಿತ (ಶೀಘ್ರ ಸ್ವಯಂಕಲಿಕಾ ಕೈಪಿಡಿ. 9ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಟಿ. ಪಿ. ಲಿಂಗಪ್ಪ	55.00
ಬೀಜಗಣಿತ (ಶೀಘ್ರ ಸ್ವಯಂಕಲಿಕಾ ಕೈಪಿಡಿ. 8ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಟಿ. ಪಿ. ಲಿಂಗಪ್ಪ	50.00
ರೇಖಾಗಣಿತ (ಶೀಘ್ರ ಸ್ವಯಂಕಲಿಕಾ ಕೈಪಿಡಿ. 8ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಟಿ. ಪಿ. ಲಿಂಗಪ್ಪ	40.00
ಚಮತ್ಕಾರದ ಗಣಿತ : 100 ಸಮಸ್ಯೆಗಳು - ಉತ್ತರಗಳು	ಡಾ॥ ಆನಂದ ದೇಶಪಾಂಡೆ	35.00
ಮೋಜಿನ ಗಣಿತ (5ನೇ ಮು.)	ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ (ಅನು : ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣರಾವ್)	90.00

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಜ್ಞಾನ-ವಿಜ್ಞಾನ ಮಾಲೆ

(ಸಂಪಾದಕರು : ಪ್ರೊ॥ ಅಡ್ಯನಡ್ಕ ಕೃಷ್ಣ ಭಟ್)

ವಿಜ್ಞಾನ ಎಂದರೇನು ? (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಜೆ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣರಾವ್	45.00
ಪರಮಾಣು- ಅಣು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಸರ್ವೋತ್ತಮ ವೈ. ಅಂಬೇಕರ	45.00
ಕಾಮನಬಿಲ್ಲು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಅಡ್ಯನಡ್ಕ ಕೃಷ್ಣ ಭಟ್	45.00
ಜೀವಾಧಾರ ಮಣ್ಣು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಪಿ. ಶಿವರಾಮ ರೈ	45.00
ಜೀವಂತ ಕೋಶ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಪಿ. ಕೆ. ರಾಜಗೋಪಾಲ್	45.00
ನಮ್ಮ ದೇಹ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಸಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ್	45.00
ದೈಹಿಕ ಸ್ವಚ್ಛತೆ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ನಾ. ಸೋಮೇಶ್ವರ	45.00

ವಿಜ್ಞಾನ - ಸರಳ ಪರಿಚಯ

(ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು : ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ)

ಬೆಳಕು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ	60.00
ಬಲ ಮತ್ತು ಚಲನೆ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ	60.00
ಶಾಖ ಮತ್ತು ಶಬ್ದ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ	60.00
ಪರಮಾಣು ನ್ಯೂಕ್ಲಿಯಸ್	ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ	60.00
ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತತ್ವ	ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ	60.00
ವಿದ್ಯುನ್ಮಾನ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳು	ಎಸ್. ಕ್ಷಮಾ	60.00
ಅಣು, ಪರಮಾಣು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತಗಳು	ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ	60.00
ಗಾಳಿ ಮತ್ತು ಅನಿಲಗಳು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ	60.00
ಇಂಧನಗಳು (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ	50.00
ಆಮ್ಲ, ಪ್ರತ್ಯಾಮ್ಲ ಮತ್ತು ಲವಣಗಳು	ಬಿ. ವಿ. ಸುಭದ್ರ	60.00
ಕಾರ್ಬನ್ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಸರ್ವೋತ್ತಮ ಅಂಬೇಕರ್	60.00
ನೀರು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	50.00
ಜೀವಿ ವೈವಿಧ್ಯ ಮತ್ತು ವಿಕಾಸ	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	60.00
ಜೈವಿಕ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	60.00
ಜೀವಕೋಶ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳು (3ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಪಿ. ಕೆ. ರಾಜಗೋಪಾಲ್	50.00
ಸಸ್ಯಗಳು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಸುಮಂಗಲ ಎಸ್. ಮುಮ್ಮಿಗಟ್ಟಿ	50.00
ಪ್ರಾಣಿಗಳು (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಸುಮಂಗಲ ಎಸ್. ಮುಮ್ಮಿಗಟ್ಟಿ	50.00
ಮಾನವ ದೇಹ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಸಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ್	60.00
ಜ್ಞಾನೇಂದ್ರಿಯಗಳು	ಡಾ॥ ನಾ. ಸೋಮೇಶ್ವರ	60.00
ಪರಿಸರ ಅಧ್ಯಯನ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ	60.00

ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ, ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರಪಂಚ	ಟಿ. ಜಿ. ಶ್ರೀನಿಧಿ	120.00
ನ್ಯಾನೊಪ್ರಪಂಚ (ನ್ಯಾನೊವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ನ್ಯಾನೊತಂತ್ರಜ್ಞಾನದ ಪರಿಚಯ. 2ನೇ ಮು.)	ಪ್ರೊ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಆರ್. ರಾವ್ (ಅನು : ಇಂದುಮತಿ ರಾವ್)	200.00
ವರ್ಣ ಮಾಯಾಜಾಲ (ಒಂದು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	475.00
ಜೀವಜಗತ್ತಿನ ಕೌತುಕಗಳು : ಚಲನೆ (4ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	80.00
ಜೀವಜಗತ್ತಿನ ಕೌತುಕಗಳು : ಲಾಲನೆ- ಪಾಲನೆ (4ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	80.00
ಜೀವಜಗತ್ತಿನ ಕೌತುಕಗಳು : ಪ್ರೀತಿ- ಪ್ರಣಯ (3ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	80.00
ಜೀವಜಗತ್ತಿನ ಕೌತುಕಗಳು : ನಿದ್ರೆ- ವಿಶ್ರಾಂತಿ (2ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	80.00
ಜೀವಜಗತ್ತಿನ ಕೌತುಕಗಳು : ಹುಟ್ಟು- ಸಾವು (2ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ	80.00
ಪ್ರಾಣಿಲೋಕದ ವಿಸ್ಮಯಗಳು	ಜಿ. ವಿ. ಗಣೇಶಯ್ಯ	65.00
ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ಜೀವಾಂಕುರ. ಎಂದು ? ಎಂತು ?	ಎಂ. ಎಸ್. ಚಡ್ಡಾ, ಬಾಳ ಫೊಂಡ್ಕೆ	70.00
ಅದೃಶ್ಯಲೋಕದ ಅಗೋಚರ ಜೀವಿಗಳು (2ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ನಾ. ಸೋಮೇಶ್ವರ	80.00
ಶರೀರವೋ ರಣರಂಗವೋ ? (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಬಾಳ ಫೊಂಡ್ಕೆ	50.00
ಇದೇಕೆ ಹೀಗೆ ? (8ನೇ ಮುದ್ರಣ)	(ಸಂಗ್ರಹ - ಅನುವಾದ : ಕೊಳ್ಳೇಗಾಲ ಶರ್ಮ)	90.00
ಏನು ? ಏಕೆ ? ಹೇಗೆ ? (ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರಗಳು. 12ನೇ ಮು.)	ಡಾ॥ ಆನಂದ ದೇಶಪಾಂಡೆ	40.00
ಕುತೂಹಲ ಕೆರಳಿಸುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು- ಉತ್ತರಗಳು	ಕೆ. ಎಲ್. ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ರಾವ್	110.00
ವಿಚಿತ್ರ ಸತ್ಯಗಳು, ಕುತೂಹಲಕರ ಕತೆಗಳು (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಜಿ. ವಿ. ಗಣೇಶಯ್ಯ	100.00
ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಪಂಚ - ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಗತಿಗಳು (10ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಕೈವಾರ ಗೋಪೀನಾಥ್	30.00
ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಪಂಚ - ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಸಂಗತಿಗಳು (9ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಕೈವಾರ ಗೋಪೀನಾಥ್	30.00
ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಪಂಚ - ಸಂಶೋಧನೆಯ ಜಗತ್ತು (7ನೇ ಮು.)	ಕೈವಾರ ಗೋಪೀನಾಥ್	35.00
ಫಿಸಿಕ್ಸ್ ಮತ್ತು ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್ (5ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪ್ರೊ॥ ಅಡ್ಯನಡ್ಕ ಕೃಷ್ಣ ಭಟ್	85.00
ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಸ್ಮಯ (ಆಯ್ದ ಲೇಖನಗಳು. 5ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಪಾ. ವೆಂ. ಆಚಾರ್ಯ	150.00
ಮರಳ ಮೇಲಿನ ಹೆಜ್ಜೆಗಳು (ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖನಗಳ ಸಂಕಲನ)	ಕೊಳ್ಳೇಗಾಲ ಶರ್ಮ	70.00
ಗಡಿಯಾರದ ಕಥೆ (ವಿಸ್ತೃತ 4ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಎಂ. ಎಸ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಅಯ್ಯರ್	40.00
ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಕಥೆ (5ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಮಹೀಧರ ನಳಿನೀಮೋಹನ್	100.00
ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನದ ಕಥೆ (2ನೇ ಮು.)	ಉದಯ್ ಪಾಟೀಲ್ (ಅನು : ಪಿ. ಆರ್. ವಿಶ್ವನಾಥ್)	75.00
ಅಂತರಿಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಮಾನವ	ಪಿ. ರಾಧಾಕೃಷ್ಣನ್ (ಅನು : ಕೆ. ಎಲ್. ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ರಾವ್)	60.00
ತಾರಾಂತರಂಗ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಬಿಮಾನ್ ಬಸು (ಅನು : ಕೊಳ್ಳೇಗಾಲ ಶರ್ಮ)	50.00
ಆಗಸದ ಅಲೆಮಾರಿಗಳು (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಶೈಲಜಾ	100.00
ಶುಕ್ರಗ್ರಹದ ಸಂಕ್ರಮಣ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಶೈಲಜಾ	40.00
ಭೂಮಿಯಿಂದ ಬಾನಿನತ್ತ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಡಾ॥ ಪಿ. ಆರ್. ವಿಶ್ವನಾಥ್	125.00
ಚುಕ್ಕಿ ಚಂದ್ರಮ ('ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ' ಕವನ ಸಂಕಲನ. 4ನೇ ಮು.)	ಎಸ್. ಮಂಜುನಾಥ	50.00
ಹಾರಾಡುವ ತಟ್ಟೆಗಳು (ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಲೇಖನಗಳು. 5ನೇ ಮುದ್ರಣ)	ಜೆ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ರಾವ್	70.00

ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಹೇಗೆ ?	*ಜಿ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ರಾವ್*	**50.00**
ಜನಸಾಮಾನ್ಯರಿಗೆ ಎಂಥ ವಿಜ್ಞಾನ ಬೇಕು ? (6ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಜಿ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ರಾವ್*	**60.00**
ಚಕ್ರ (ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖನಗಳು. 4ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಜಿ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ರಾವ್*	**60.00**
ಬೈಜಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ತು (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಜಿ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ರಾವ್*	**60.00**
ಬೈಜಿಕ ವಿದ್ಯುತ್. ಒಂದು ಪರಿಚಯ (ವಿಸ್ತೃತ 2ನೇ ಮು.)	*ಡಾ॥ ಎಮ್. ಎಸ್. ಎಸ್. ಮೂರ್ತಿ*	**70.00**
ಭವಿಷ್ಯದ ಭರವಸೆ : ಹಸಿರು ಇಂಧನ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಟಿ. ಎಸ್. ಗೋಪಾಲ್*	**50.00**
ಸೌರಶಕ್ತಿಯ ಕಥೆ	*ಅರವಿಂದ ಗುಪ್ತ (ಅನು : ಟಿ. ಆರ್. ಅನಂತರಾಮು)*	**65.00**
ಶಕ್ತಿಯ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿ ಯುಕ್ತಿ (ಪರಿಸರ ಮಾಲಿನ್ಯಕ್ಕೊಂದು ಪರಿಹಾರ. 2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಡಾ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಸಿದ್ಧರಾಮಯ್ಯ, ಡಾ॥ ಕೆ. ವೆಂಕಟರಂಗ ನಾಯಕ*	**35.00**
ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳಿಗಾಗಿ ಸಮುದ್ರಮಥನ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಟಿ. ಕೆ. ಎಸ್. ಮೂರ್ತಿ*	**60.00**
ಆಪತ್ಕಾಲಕ್ಕೆ ಅಂತರ್ಜಲ (4ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎನ್. ಪಿ. ಶ್ರೀಕಾಂತ*	**20.00**
ಕೊಳವೆಬಾವಿಗೆ ಜಲ ಮರುಪೂರಣ (6ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎನ್. ಜೆ. ದೇವರಾಜ ರೆಡ್ಡಿ*	**30.00**
ಬತ್ತಿದ ಕೊಳವೆಬಾವಿಯಲ್ಲಿ ಉಕ್ಕಿದ ಗಂಗೆ (3ನೇ ಮು.)	*ಎನ್. ಜೆ. ದೇವರಾಜ ರೆಡ್ಡಿ*	**80.00**
ಸಿವಿಲ್ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್. ಒಂದು ಪರಿಚಯ (ವಿಸ್ತೃತ 2ನೇ ಮು.)	*ಎಂ. ಜಿ. ಶ್ರೀನಿವಾಸನ್*	**200.00**

♦ ಎಳೆಯರಿಗಾಗಿ ವಿಜ್ಞಾನ

ಸುಣ್ಣದಿಂದ ಅಮೃತಶಿಲೆ (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎಲ್. ಎಸ್. ಶ್ಯಾಮಸುಂದರ ಶರ್ಮ*	**65.00**
ಎಲ್ಲಿಂದ ಬಂತು ಬೂಸ್ಟ್? (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎಲ್. ಎಸ್. ಶ್ಯಾಮಸುಂದರ ಶರ್ಮ*	**65.00**
ದೇಹಲೋಕದಲ್ಲಿ ಪುಟ್ಟ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಡಾ॥ ಎ. ಸುಬ್ಬರಾವ್*	**75.00**
ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ (ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮಾಹಿತಿ ಸಾಹಿತ್ಯ. 6ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಬೇಂದ್ರೆ ಮಂಜುನಾಥ*	**22.00**
ಬೆಳಕು (11ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಗಾಯತ್ರಿ ಮೂರ್ತಿ*	**40.00**
ಶಬ್ದಲೋಕ (9ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಗಾಯತ್ರಿ ಮೂರ್ತಿ*	**30.00**
ಶಾಖ (9ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಗಾಯತ್ರಿ ಮೂರ್ತಿ*	**22.00**
ಗಾಳಿ (10ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಗಾಯತ್ರಿ ಮೂರ್ತಿ*	**15.00**
ನೀರು (10ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಗಾಯತ್ರಿ ಮೂರ್ತಿ*	**15.00**

♦ ಪ್ರಯೋಗಗಳು, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು

ತ್ಯಾಜ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ವಿಜ್ಞಾನ - ಆಟಿಕೆಗಳು	*ಅರವಿಂದ ಗುಪ್ತ*	**40.00**
ಸರಳ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ರೋಮಾಂಚನಗೊಳಿಸುವ ವಿಜ್ಞಾನ	*ಅರವಿಂದ ಗುಪ್ತ*	**180.00**
ಆಹಾ, ಎಷ್ಟೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ! (2ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಅರವಿಂದ ಗುಪ್ತ*	**150.00**
ಮಾಡಿ ಕಲಿ (ವಿಜ್ಞಾನ ವಿವೇಕ. 2ನೇ ಮು.)	*ಅರವಿಂದ ಗುಪ್ತ*	**150.00**
ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ವಿನೋದ (18ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎಂ. ಸ್ಟೊಲ್ಯಾರ್, ಎಲ್. ಫೋಮಿನ್*	**35.00**
ವಿಸ್ಮಯಗಳ ನಾಡಿನಲ್ಲಿ	*ವಿ. ಜಿ. ಕುಲಕರ್ಣಿ, ವಿ. ಜಿ. ಗಂಭೀರ್, ಆರ್. ಎಂ. ಭಾಗವತ್*	**70.00**
ನಮ್ಮ ಪುಟ್ಟ ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆ (3ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಎಲ್. ಎಸ್. ಶ್ಯಾಮಸುಂದರ ಶರ್ಮ*	**40.00**
ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-1 (8ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್*	**160.00**
ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-2 (8ನೇ ಮುದ್ರಣ)	*ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್*	**160.00**
ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಪವಾಡಗಳು	*ಬಿ. ಪ್ರೇಮಾನಂದ್ (ಅನು : ಪಾಂಡುರಂಗ ಶಾಸ್ತ್ರೀ)*	**90.00**